

BỘ CÔNG THƯƠNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN NGHIÊN CỨU CƠ KHÍ

**NARIME**

TRẦN SĨ KIÊN

**ĐỘNG LỰC HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CHUYỂN ĐỘNG  
CỦA TAY MÁY CÔNG NGHIỆP DỰA TRÊN NGUYÊN LÝ CỤC  
ĐẠI PONTRYAGIN**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ

HÀ NỘI - 2026

BỘ CÔNG THƯƠNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN NGHIÊN CỨU CƠ KHÍ

**NARIME**

TRẦN SĨ KIÊN

**ĐỘNG LỰC HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CHUYỂN ĐỘNG  
CỦA TAY MÁY CÔNG NGHIỆP DỰA TRÊN NGUYÊN LÝ CỰC  
ĐẠI PONTRYAGIN**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Ngành: Kỹ thuật cơ khí

Mã số: 9.52.01.03

Xác nhận  
của Viện Nghiên cứu Cơ khí

Người hướng dẫn 1

Người hướng dẫn 2

TS. Phan Đăng Phong

GS. TSKH. Đỗ Sanh

HÀ NỘI - 2026

## LỜI CẢM ƠN

Trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án này, tôi đã nhận được rất nhiều sự quan tâm, hỗ trợ và động viên từ các thầy cô, cơ quan, đồng nghiệp và người thân. Những sự giúp đỡ quý báu ấy là nguồn động lực to lớn giúp tôi vượt qua khó khăn và hoàn thành tốt nhiệm vụ nghiên cứu của mình.

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới tập thể cán bộ giảng dạy, các nhà khoa học và đội ngũ cán bộ, viên chức của Trung tâm Đào tạo – Viện Nghiên cứu Cơ khí. Môi trường học thuật nghiêm túc, sự tận tâm trong giảng dạy cùng những điều kiện nghiên cứu thuận lợi mà Viện tạo ra đã là nền tảng quan trọng giúp tôi tích lũy kiến thức và phát triển tư duy khoa học.

Đặc biệt, tôi xin gửi lời tri ân chân thành và sâu sắc nhất tới hai thầy GS. TSKH. Đỗ Sanh và TS. Phan Đăng Phong – những người hướng dẫn khoa học đã luôn tận tình chỉ bảo, định hướng và hỗ trợ tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài. Sự tâm huyết trong nghiên cứu, tinh thần làm việc nghiêm túc và những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy đã giúp tôi từng bước hoàn thiện phương pháp tiếp cận, mở rộng hiểu biết và hoàn thành luận án một cách tốt nhất.

Bên cạnh đó, tôi cũng xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp đã chia sẻ tài liệu, hỗ trợ kỹ thuật và động viên tôi trong quá trình nghiên cứu. Những sự giúp đỡ thiết thực ấy đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành công việc một cách hiệu quả.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời biết ơn sâu sắc đến gia đình và người thân – những người luôn ở bên cạnh, động viên và là điểm tựa tinh thần vững chắc cho tôi trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận án.

Một lần nữa, tôi xin trân trọng cảm ơn tất cả những sự hỗ trợ quý báu mà tôi đã nhận được.

**Nghiên cứu sinh**

**Trần Sĩ Kiên**

## LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin trân trọng cam đoan rằng đề tài luận án với tiêu đề “Động lực học và điều khiển tối ưu chuyên động của tay máy công nghiệp dựa trên nguyên lý cực đại Pontryagin” là công trình nghiên cứu khoa học do chính tôi trực tiếp thực hiện, dưới sự hướng dẫn tận tình và chuyên môn sâu sắc của TS. Phan Đăng Phong và GS.TSKH. Đỗ Sanh.

Những kết quả, phân tích và nhận định được trình bày trong luận án đều là sản phẩm của quá trình tìm hiểu, nghiên cứu nghiêm túc và nỗ lực của bản thân tôi. Tôi khẳng định rằng toàn bộ nội dung của luận án chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nghiên cứu nào trước đây và không trùng lặp với các công trình của các tác giả khác.

Trong quá trình triển khai luận án, tôi chỉ sử dụng những tài liệu, số liệu và nguồn tham khảo được trích dẫn đầy đủ, rõ ràng trong mục Tài liệu tham khảo. Tôi không sử dụng trái phép, không sao chép một phần hay toàn bộ kết quả từ bất kỳ nghiên cứu nào khác. Mọi thông tin, dữ liệu sử dụng đều được thu thập, xử lý và trình bày một cách trung thực, đảm bảo tính minh bạch và khách quan.

Tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật, trước Viện và các cơ quan quản lý khoa học về sự trung thực, tính chính xác và tính nguyên bản của toàn bộ nội dung luận án này.

**Nghiên cứu sinh**

**Trần Sĩ Kiên**

## MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN .....	i
LỜI CAM ĐOAN .....	ii
MỤC LỤC .....	iii
DANH MỤC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT .....	vi
DANH MỤC BẢNG BIỂU .....	ix
DANH MỤC HÌNH VẼ .....	x
PHẦN MỞ ĐẦU .....	1
1. Tính cấp thiết của đề tài luận án .....	1
2. Mục tiêu nghiên cứu.....	3
2.1. Mục tiêu tổng quát .....	3
2.2. Mục tiêu cụ thể.....	3
3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.....	3
3.1. Đối tượng nghiên cứu.....	3
3.2. Phạm vi nghiên cứu.....	3
4. Phương pháp nghiên cứu.....	4
4.1. Phương pháp nghiên cứu lý thuyết .....	4
4.2. Phương pháp nghiên cứu mô phỏng .....	4
5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn.....	5
5.1. Ý nghĩa khoa học .....	5
5.2. Ý nghĩa thực tiễn.....	5
6. Những đóng góp mới của luận án .....	5
7. Bố cục của luận án .....	6
CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU.....	7
1.1. Tổng quan về tay máy công nghiệp .....	7
1.1.1. Sự phát triển của tay máy công nghiệp.....	7
1.1.2. Ưu thế của tay máy công nghiệp.....	9
1.2. Khái quát về phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động tay máy công nghiệp .....	10
1.3. Tình hình nghiên cứu trên thế giới và trong nước .....	11
1.3.1. Vấn đề phân tích động lực học tay máy robot .....	12

1.3.2. Vấn đề tối ưu hoá chuyển động của tay máy robot .....	18
1.4. Định hướng nội dung nghiên cứu của đề tài luận án .....	29
Kết luận chương 1 .....	30
<b>CHƯƠNG 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TAY MÁY CÔNG NGHIỆP .....</b>	<b>32</b>
2.1. Cơ sở lý thuyết về động học tay máy robot .....	33
2.1.1. Phương pháp ma trận truyền .....	33
2.1.2. Áp dụng phương pháp ma trận truyền cho tay máy robot .....	35
2.2. Cơ sở lý thuyết về động lực học tay máy robot .....	37
2.2.1. Phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận .....	37
2.2.2. Phương trình chuyển động của tay máy robot chịu ràng buộc .....	39
2.3. Cơ sở lý thuyết về điều khiển tối ưu tay máy robot.....	40
2.3.1. Bài toán điều khiển tối ưu của tay máy robot .....	40
2.3.2. Nguyên lý cực đại Pontryagin.....	42
2.3.3. Áp dụng nguyên lý Pontryagin điều khiển tối ưu tay máy robot.....	44
2.4. Cơ sở lý thuyết một số quy luật chuyển động phục vụ so sánh định lượng .....	47
2.4.1. Quy luật chuyển động đa thức bậc ba .....	47
2.4.2. Quy luật chuyển động đa thức bậc năm.....	48
2.4.3. Quy luật chuyển động S-curve.....	49
2.4.4. Quy trình so sánh các luật chuyển động theo hàm mục tiêu J.....	51
2.5. Khung phương pháp đề xuất của luận án.....	52
Kết luận chương 2 .....	55
<b>CHƯƠNG 3. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TAY MÁY CÔNG NGHIỆP TRONG CHUYỂN ĐỘNG ĐIỂM-ĐIỂM.....</b>	<b>56</b>
3.1. Điều khiển tối ưu tay máy chuyển động đến điểm đích .....	56
3.1.1. Đặt bài toán .....	56
3.1.2. Thiết lập phương trình động lực học .....	57
3.1.3. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu.....	62
3.1.4. Kết quả mô phỏng nghiệm điều khiển tối ưu.....	63
3.1.5. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng .....	68
3.2. Điều khiển tối ưu tay máy chuyển động điểm-điểm theo chu trình .....	72

3.2.1. Đặt bài toán .....	72
3.2.2. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu.....	74
3.2.3. Kết quả mô phỏng nghiệm điều khiển tối ưu.....	75
3.2.4. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng .....	79
Kết luận chương 3 .....	83
<b>CHƯƠNG 4. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TAY MÁY CÔNG NGHIỆP CHỊU RÀNG BUỘC QUỸ ĐẠO ĐIỂM CUỐI.....</b>	<b>85</b>
4.1. Điều khiển tối ưu tay máy chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối .....	86
4.1.1. Đặt bài toán .....	86
4.1.2. Thiết lập phương trình động lực học tay máy chịu ràng buộc.....	87
4.1.3. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu.....	94
4.1.4. Kết quả mô phỏng số .....	94
4.1.5. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng .....	99
4.2. Điều khiển tối ưu tay máy trên quỹ đạo định sẵn theo chu trình.....	105
4.2.1. Đặt bài toán .....	105
4.2.2. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu.....	105
4.2.3. Kết quả mô phỏng số .....	106
4.2.4. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng .....	110
Kết luận chương 4 .....	113
<b>KẾT LUẬN CHUNG VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TIẾP THEO.....</b>	<b>115</b>
<b>DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ .....</b>	<b>117</b>
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>	<b>118</b>
<b>PHỤ LỤC .....</b>	<b>126</b>

## DANH MỤC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

### Danh mục ký hiệu

TT	Ký hiệu	Mô tả
1	$\mathbf{q}$	Vectơ tọa độ suy rộng/ Vectơ biến khớp
2	$n$	Số tọa độ suy rộng
3	$\mathbf{r}_E$	Vectơ chứa thông tin vị trí điểm tác động cuối
4	$\beta$	Số tọa độ xác định vị trí điểm tác động cuối
5	$\mathbf{u}$	Vectơ chứa các biến điều khiển
6	$q_i$	Tọa độ suy rộng/ Biến khớp thứ $i$
7	$u_i$	Lực/mômen điều khiển tại khớp thứ $i$
8	$x_E, y_E$	Tọa độ của điểm tác động cuối
9	$\mathbf{r}^{(i)}$	Vectơ chứa thông tin vị trí của một điểm trong hệ tọa độ $O_i x_i y_i$
10	$\mathbf{T}_j^i$	Ma trận biểu diễn phép biến đổi của hệ tọa độ $O_j x_j y_j$ về hệ tọa độ $O_i x_i y_i$
11	$\mathbf{A}$	Ma trận quán tính
12	$\mathbf{Q}$	Ma trận lực suy rộng của các lực hoạt động
13	$\mathbf{Q}_{qt}$	Ma trận lực suy rộng của các lực quán tính
14	$\Pi$	Hàm thế năng tay máy
15	$\mathbf{G}$	Vectơ chứa lực suy rộng của trọng lực
16	$\mathbf{F}_c$	Vectơ chứa lực suy rộng của lực cản nhớt
17	$\mathbf{D}$	Ma trận hệ số trong nguyên lý phù hợp
18	$\mathbf{x}$	Vectơ chứa biến trạng thái

TT	Ký hiệu	Mô tả
19	$\dot{\mathbf{q}}$	Vectơ chứa vận tốc suy rộng/vận tốc khớp
20	$\ddot{\mathbf{q}}$	Vectơ chứa gia tốc suy rộng/gia tốc khớp
21	$J$	Phiếm hàm mục tiêu
22	$\mathbf{p}$	Vectơ chứa biến liên hợp
23	$f_0$	Hàm dưới dấu tích phân của hàm mục tiêu
24	$H$	Hàm Hamilton
27	$r$	Số phương trình ràng buộc của tay máy
28	$m_i$	Khối lượng khâu thứ $i$
29	$m$	Khối lượng tải
30	$L_i$	Chiều dài khâu thứ $i$
31	$c_i$	Khoảng cách từ khớp đến khối tâm khâu $i$
32	$J_i$	Mômen quán tính khâu thứ $i$
33	$g$	Gia tốc trọng trường
34	$t_f$	Thời gian chuyển động của tay máy
35	$t_{f_1}, t_{f_2}$	Thời gian các pha đi, pha về của chu trình
36	$z$	Phiếm hàm mục tiêu tích lũy theo thời gian
37	$\tau$	Thời gian chuẩn hóa trong quỹ đạo thẳng
38	$j_m$	Giá trị giới hạn của độ giạt trong quy luật S-curve
39	$T_j$	Thời gian pha có độ giạt khác không trong quy luật S-curve
40	$T_a$	Thời gian pha gia tốc không đổi trong quy luật S-curve

<b>TT</b>	<b>Ký hiệu</b>	<b>Mô tả</b>
41	$T_v$	Thời gian pha vận tốc không đổi trong quy luật S-curve
42	$a_m$	Gia tốc cực đại trong quy luật S-curve
43	$v_m$	Vận tốc cực đại trong quy luật S-curve

### **Danh mục chữ viết tắt**

<b>TT</b>	<b>Chữ viết tắt</b>	<b>Mô tả</b>
1	RRP	Cấu trúc tay máy gồm hai khớp quay và một khớp tịnh tiến (Revolute-Revolute-Prismatic)
2	RRR	Cấu trúc tay máy gồm ba khớp quay (Revolute-Revolute- Revolute)

**DANH MỤC BẢNG BIỂU**

Bảng 3.1. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động đến điểm đích .....	71
Bảng 3.2. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động điểm-điểm theo chu trình .....	82
Bảng 4.1. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối .....	104
Bảng 4.2. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối theo chu trình.....	113

## DANH MỤC HÌNH VẼ

Hình 1.1. Xu hướng tăng trưởng số robot công nghiệp lắp đặt mới trên thế giới giai đoạn gần đây, đơn vị: nghìn robot [2].....	8
Hình 1.2. Một số ứng dụng của tay máy công nghiệp .....	10
Hình 1.3. Sơ đồ tách khâu thứ $i$ [14].....	13
Hình 1.4. Mô hình tay máy Bendix PACS trong nghiên cứu sớm về điều khiển tối ưu robot[31] .....	21
Hình 2.1. Biểu diễn các hệ tọa độ và vị trí điểm M .....	34
Hình 2.2. Khung phương pháp đề xuất của luận án.....	53
Hình 3.1. Tay máy phẳng RRP .....	57
Hình 3.2. Đồ thị các biến khớp .....	64
Hình 3.3. Đồ thị quỹ đạo chuyển động điểm cuối .....	65
Hình 3.4. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 1 .....	65
Hình 3.5. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 2 .....	66
Hình 3.6. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 3 .....	66
Hình 3.7. Đồ thị các lực và mômen điều khiển.....	67
Hình 3.8. Đồ thị hàm chi phí tích lũy.....	67
Hình 3.9. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động.....	69
Hình 3.10. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu.....	70
Hình 3.11. Đồ thị mômen $u_1$ của các quy luật chuyển động .....	70
Hình 3.12. Đồ thị mômen $u_2$ của các quy luật chuyển động.....	71
Hình 3.13. Đồ thị lực $u_3$ của các quy luật chuyển động.....	71
Hình 3.14. Đồ thị các góc khớp giai đoạn đi và về.....	76
Hình 3.15. Đồ thị các vận tốc khớp giai đoạn đi và về.....	76
Hình 3.16. Đồ thị vị trí điểm tác động cuối .....	77
Hình 3.17. Đồ thị mômen điều khiển giai đoạn đi và về .....	77
Hình 3.18. Đồ thị tích lũy hàm mục tiêu giai đoạn đi và về.....	78

Hình 3.19. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động.....	80
Hình 3.20. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu.....	80
Hình 3.21. Đồ thị mômen $u_1$ của các quy luật chuyển động .....	81
Hình 3.22. Đồ thị mômen $u_2$ của các quy luật chuyển động.....	81
Hình 3.23. Đồ thị mômen $u_3$ của các quy luật chuyển động.....	82
Hình 4.1. Tay máy phẳng ba khâu quay (RRR).....	86
Hình 4.2. Đồ thị các biến khớp .....	95
Hình 4.3. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 1 .....	96
Hình 4.4. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 2 .....	96
Hình 4.5. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 3 .....	97
Hình 4.6. Đồ thị quỹ đạo chuyển động điểm cuối .....	97
Hình 4.7. Đồ thị các lực/mômen điều khiển .....	98
Hình 4.8. Đồ thị hàm mục tiêu.....	99
Hình 4.9. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động.....	102
Hình 4.10. Đồ thị mômen $u_1$ của các quy luật chuyển động .....	102
Hình 4.11. Đồ thị mômen $u_2$ của các quy luật chuyển động.....	103
Hình 4.12. Đồ thị mômen $u_3$ của các quy luật chuyển động.....	103
Hình 4.13. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu.....	104
Hình 4.14. Đồ thị các biến khớp giai đoạn đi và về.....	107
Hình 4.15. Đồ thị các vận tốc khớp giai đoạn đi và về.....	108
Hình 4.16. Đồ thị quỹ đạo điểm cuối.....	108
Hình 4.17. Đồ thị mômen điều khiển giai đoạn đi và về .....	109
Hình 4.18. Đồ thị hàm chi phí giai đoạn đi và về .....	109
Hình 4.19. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động.....	110
Hình 4.20. Đồ thị mômen $u_1$ của các quy luật chuyển động .....	111
Hình 4.21. Đồ thị mômen $u_2$ của các quy luật chuyển động.....	111

Hình 4.22. Đồ thị mômen  $u_3$  của các quy luật chuyển động..... 112

Hình 4.23. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu toàn chu trình..... 112

## PHẦN MỞ ĐẦU

### 1. Tính cấp thiết của đề tài luận án

Trong những năm gần đây, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của tự động hóa, sản xuất thông minh và chuyển đổi số trong công nghiệp, tay máy công nghiệp ngày càng được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như lắp ráp, hàn, sơn, gia công, bóc xếp, đóng gói và vận chuyển vật liệu. Việc ứng dụng tay máy không chỉ giúp nâng cao năng suất lao động, cải thiện độ chính xác và tính ổn định của quá trình sản xuất, mà còn góp phần giảm cường độ lao động của con người, nâng cao mức độ an toàn trong các môi trường làm việc độc hại, nguy hiểm hoặc có tính lặp lại cao. Vì vậy, tay máy công nghiệp đã trở thành một trong những thành phần quan trọng của các hệ thống sản xuất hiện đại.

Trong thực tế vận hành, yêu cầu đặt ra đối với tay máy công nghiệp không chỉ dừng ở khả năng thực hiện được chuyển động theo yêu cầu công nghệ, mà còn phải bảo đảm các tiêu chí về độ chính xác, độ ổn định, tính linh hoạt, thời gian chu kỳ làm việc và hiệu quả sử dụng năng lượng. Đối với cùng một nhiệm vụ công nghệ, tay máy có thể thực hiện nhiều phương án chuyển động khác nhau trong không gian khớp hoặc không gian thao tác. Mỗi phương án chuyển động sẽ dẫn đến sự khác nhau về tải trọng động, lực và mômen tác dụng tại các khớp, mức tiêu hao năng lượng, độ êm dịu của chuyển động, cũng như tuổi thọ làm việc của cơ cấu chấp hành và các bộ phận truyền động. Điều đó cho thấy việc nghiên cứu chuyển động của tay máy dưới góc độ động lực học và tối ưu hóa là một yêu cầu có tính cấp thiết cả về lý luận và ứng dụng.

Phân tích động lực học tay máy công nghiệp là cơ sở để xác định mối quan hệ giữa chuyển động của hệ với các lực và mômen tác dụng tại các khâu, khớp và cơ cấu dẫn động. Kết quả phân tích động lực học cho phép đánh giá đặc tính làm việc của tay máy, tính toán công suất và tải trọng cho các bộ truyền động, đồng thời là nền tảng để xây dựng các thuật toán điều khiển và mô phỏng chuyển động. Trong khi đó, tối ưu hóa chuyển động lại hướng tới việc lựa chọn quy luật chuyển động và điều khiển phù hợp nhằm đạt được các mục tiêu mong muốn như giảm năng lượng tiêu hao, giảm tải trọng động, nâng cao chất lượng

bám quỹ đạo, rút ngắn thời gian thao tác hoặc bảo đảm chuyển động hợp lý trong các điều kiện ràng buộc công nghệ. Như vậy, phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động là hai nội dung có quan hệ chặt chẽ, bổ sung cho nhau trong nghiên cứu và ứng dụng tay máy công nghiệp.

Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu về mô hình hóa động học, động lực học và điều khiển tay máy, song đây vẫn là một lĩnh vực còn nhiều vấn đề cần tiếp tục làm rõ. Một mặt, tay máy là hệ cơ học nhiều vật, nhiều bậc tự do, có mô hình động học và động lực học phi tuyến, tham số hình học và động học đa dạng, do đó việc xây dựng mô hình có tính chặt chẽ, hệ thống và thuận lợi cho tính toán luôn là vấn đề quan trọng. Mặt khác, trong các bài toán chuyển động thực tế, tay máy thường phải làm việc dưới nhiều dạng yêu cầu khác nhau như chuyển động điểm-điểm, chuyển động theo quỹ đạo cho trước, chuyển động chu kỳ, chuyển động mang tải, hoặc chuyển động trong điều kiện có ràng buộc công nghệ. Những bài toán như vậy đòi hỏi không chỉ mô hình động lực học phù hợp mà còn cần một cách tiếp cận tối ưu hóa có khả năng xử lý đồng thời các điều kiện biên, ràng buộc chuyển động và các tiêu chuẩn tối ưu đặt ra.

Bên cạnh đó, trong nhiều nghiên cứu và ứng dụng hiện nay, mô phỏng số ngày càng giữ vai trò quan trọng trong thiết kế, đánh giá và tối ưu hóa chuyển động của tay máy công nghiệp. Việc thử nghiệm trực tiếp trên hệ robot thực thường tốn kém, mất thời gian và có thể tiềm ẩn rủi ro cho thiết bị, đặc biệt ở các giai đoạn khảo sát ban đầu. Do đó, xây dựng được mô hình động lực học, tiêu chí tối ưu và quy trình mô phỏng đáng tin cậy có ý nghĩa thiết thực trong việc đánh giá các phương án chuyển động trước khi triển khai thực tế. Đồng thời, các mô hình và dữ liệu mô phỏng này cũng có thể cung cấp cơ sở tham khảo cho các hướng nghiên cứu tiếp theo về điều khiển thông minh, tối ưu hóa dựa trên dữ liệu và mô hình song sinh số trong lĩnh vực robot công nghiệp.

Từ những phân tích trên, có thể thấy rằng nghiên cứu phân tích động lực học và điều khiển tối ưu chuyển động của tay máy công nghiệp là cần thiết. Đặc biệt, đối với các dây chuyền sản xuất tự động, nơi tay máy thường làm việc lặp lại với tần suất lớn, việc cải thiện quy luật chuyển động và tín hiệu điều

khiến có thể mang lại hiệu quả tích lũy đáng kể về tải động, độ bền thiết bị và năng suất của hệ thống. Vì vậy, việc xây dựng cơ sở lý thuyết và khung phương pháp cho bài toán phân tích động lực học và điều khiển tối ưu chuyển động của tay máy công nghiệp là hướng nghiên cứu có ý nghĩa và giá trị ứng dụng rõ rệt.

## **2. Mục tiêu nghiên cứu**

### **2.1. Mục tiêu tổng quát**

Nghiên cứu cơ sở lý thuyết và xây dựng khung phương pháp phân tích động lực học, tối ưu hóa chuyển động của tay máy công nghiệp, làm cơ sở cho việc mô phỏng và đánh giá một số bài toán chuyển động điển hình.

### **2.2. Mục tiêu cụ thể**

- Nghiên cứu tổng quan và tổng hợp cơ sở lý thuyết về phân tích động lực học và điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp.
- Tối ưu hoá chuyển động của tay máy công nghiệp trên cơ sở mô hình động lực học, nguyên lý phù hợp và nguyên lý cực đại Pontryagin.
- Áp dụng phương pháp mô phỏng minh họa một số chuyển động điển hình của tay máy công nghiệp.

## **3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

### **3.1. Đối tượng nghiên cứu**

Đối tượng nghiên cứu của luận án là tay máy công nghiệp dạng chuỗi hở, tập trung vào các vấn đề phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động của tay máy trong quá trình làm việc.

Đối tượng khảo sát cụ thể trong mô phỏng số là các mô hình tay máy phẳng 3 bậc tự do. Các mô hình này được lựa chọn nhằm minh họa và kiểm chứng khả năng áp dụng của khung phương pháp đề xuất đối với một số dạng chuyển động điển hình của tay máy công nghiệp.

### **3.2. Phạm vi nghiên cứu**

Luận án tập trung nghiên cứu các tay máy công nghiệp trên phương diện mô hình hóa cơ học, phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động.

- Các khâu của tay máy được giả thiết là vật rắn tuyệt đối, không xét đến tính đàn hồi của các khâu, khớp và các vấn đề bất định (sai số tham số và nhiễu tải). Đây là giới hạn của luận án và là cơ sở cho hướng phát triển tiếp theo.

- Các dạng chuyển động được xem xét tối ưu hóa là chuyển động điểm-điểm, chuyển động theo quỹ đạo định sẵn của điểm tác động cuối. Trong đó coi ràng buộc đường dịch chuyển hình học đặt lên điểm tác động cuối là liên kết lý tưởng.

- Tiêu chí tối ưu được lựa chọn là giảm nỗ lực điều khiển, được biểu diễn thông qua tích phân bình phương lực hoặc mômen điều khiển theo thời gian.

#### **4. Phương pháp nghiên cứu**

Luận án sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết kết hợp với mô phỏng số. Trên cơ sở lý thuyết cơ học hệ nhiều vật và lý thuyết điều khiển tối ưu, các bài toán phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động của tay máy công nghiệp được xây dựng và khảo sát theo hướng mô hình hóa, thiết lập phương trình, giải bài toán tối ưu bằng các công cụ mô phỏng số.

##### **4.1. Phương pháp nghiên cứu lý thuyết**

- Nghiên cứu lý thuyết phương pháp ma trận truyền, phương trình Lagrange dạng ma trận và nguyên lý phù hợp để thiết lập phương trình động lực học cho tay máy công nghiệp.

- Nghiên cứu lý thuyết về nguyên lý cực đại Pontryagin để thiết lập các điều kiện cần của bài toán tối ưu, làm cơ sở xác định quy luật điều khiển và quy luật chuyển động phù hợp với các điều kiện biên và ràng buộc đặt ra.

##### **4.2. Phương pháp nghiên cứu mô phỏng**

- Xác định chuyển động tối ưu của một số tay máy phẳng trong một số chuyển động điển hình ở môi trường công nghiệp: chuyển động điểm-điểm, chuyển động theo quỹ đạo định sẵn, chuyển động khứ hồi.

- So sánh định lượng giữa kết quả điều khiển tối ưu với một số quy luật chuyển động hoặc phương pháp đối chứng.

## **5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn**

### **5.1. Ý nghĩa khoa học**

- Nghiên cứu, xây dựng được cơ sở lý thuyết và khung phương pháp nghiên cứu cho bài toán điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp.
- Xác định được quỹ đạo tối ưu nỗ lực điều khiển cho một số tay máy phẳng, qua đó góp phần làm rõ khả năng ứng dụng của hướng tiếp cận sử dụng nguyên lý Pontryagin trong nghiên cứu tối ưu hóa chuyển động tay máy công nghiệp.
- Đề tài sẽ đóng góp một số kết quả vào hướng nghiên cứu về điều khiển tối ưu tay máy robot dạng chuỗi mở.
- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết kết hợp với mô phỏng được trình bày trong đề tài có thể dùng làm cơ sở để tham khảo cho các nghiên cứu khoa học về điều khiển tay máy robot.

### **5.2. Ý nghĩa thực tiễn**

- Phương pháp nghiên cứu được đề xuất có thể hỗ trợ lựa chọn phương án chuyển động theo hướng giảm nỗ lực điều khiển và nâng cao hiệu quả làm việc của tay máy trong các quá trình vận hành công nghiệp.
- Kết quả nghiên cứu của luận án có thể cung cấp cơ sở tham khảo về bộ tham số đầu vào, mô hình động lực học, hàm chi phí và dữ liệu mô phỏng cho các nghiên cứu tiếp theo về điều khiển thông minh và tối ưu hóa chuyển động robot dựa trên dữ liệu.

## **6. Những đóng góp mới của luận án**

- Đề xuất được một khung phương pháp cho bài toán phân tích động lực học và điều khiển tối ưu chuyển động của tay máy công nghiệp. Trên cơ sở kế thừa các phương pháp đã biết gồm ma trận truyền, phương trình Lagrange dạng ma trận, nguyên lý phù hợp và nguyên lý cực đại Pontryagin, luận án tổ chức và kết hợp các phương pháp này thành một quy trình thống nhất để thiết lập mô hình động học, động lực học, xử lý ràng buộc quỹ đạo và xác định điều kiện điều khiển tối ưu. Điểm mới là cách tích hợp các công cụ lý thuyết nêu trên

trong cùng một khung phương pháp phục vụ trực tiếp cho các bài toán chuyển động điển hình của tay máy công nghiệp.

- Thiết lập được các bài toán điều khiển tối ưu cho một số dạng chuyển động điển hình của tay máy công nghiệp, có xét đến điều kiện điểm đích cho trước và ràng buộc quỹ đạo chuyển động. Các dạng chuyển động khác nhau được phát biểu trong cùng một khuôn khổ điều khiển tối ưu, xem xét trực tiếp đến cấu trúc động lực học của tay máy, sự thay đổi tải giữa pha đi và pha về cũng như ảnh hưởng của thời gian thực hiện từng giai đoạn thay vì chỉ được mô tả như các bài toán lập quỹ đạo hình học riêng lẻ.

- Kiểm chứng được quy luật điều khiển tối ưu thông qua mô phỏng số đối với một số mô hình tay máy phẳng điển hình, so sánh định lượng về tiêu chí tối ưu với một số quy luật chuyển động và phương pháp khác, qua đó minh họa khả năng áp dụng của phương pháp đề xuất.

## **7. Bố cục của luận án**

- Chương 1: Tổng quan về vấn đề nghiên cứu
- Chương 2: Cơ sở lý thuyết về phân tích động lực học và điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp
- Chương 3: Điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp trong chuyển động điểm-điểm
- Chương 4: Điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối
- Kết luận và kiến nghị

## CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

### 1.1. Giới thiệu chung về tay máy công nghiệp

Tay máy công nghiệp là một bộ phận quan trọng của hệ thống tự động hóa hiện đại. Theo chuẩn thuật ngữ của ISO, robot công nghiệp được hiểu là một cơ cấu chấp hành tự động, có thể lập trình lại, đa dụng, làm việc trên ba hoặc nhiều hơn ba trục, có thể cố định tại chỗ hoặc gắn trên nền tảng di động để phục vụ các ứng dụng tự động hóa trong môi trường công nghiệp [7]. Cách hiểu này cho thấy tay máy công nghiệp không chỉ là một “cánh tay cơ khí”, mà là một hệ cơ điện tử hoàn chỉnh gồm cơ cấu chấp hành, truyền động, cảm biến, bộ điều khiển và phần mềm điều phối chuyển động. Trong thực tế sản xuất, tay máy thường là thành phần trực tiếp thực hiện thao tác với chi tiết, dụng cụ hoặc môi trường công nghệ, vì vậy nó giữ vai trò trung tâm trong nhiều dây chuyền tự động hóa hiện đại.

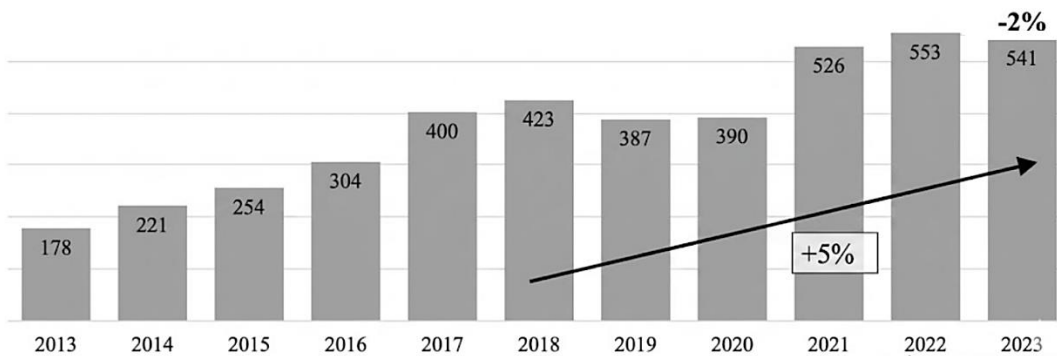
#### 1.1.1. Sự phát triển của tay máy công nghiệp

Sự phát triển của tay máy công nghiệp gắn liền với quá trình chuyển dịch từ tự động hóa cứng sang tự động hóa linh hoạt và sản xuất thông minh. Nếu trong giai đoạn đầu robot công nghiệp chủ yếu được sử dụng cho các thao tác lặp lại, có cấu trúc nhiệm vụ tương đối cố định như hàn điểm, sơn phủ, gấp đặt hay bốc xếp, thì trong giai đoạn gần đây phạm vi ứng dụng đã mở rộng mạnh sang các nhiệm vụ có yêu cầu cao hơn về độ linh hoạt, độ chính xác, tính thích nghi và mức độ tích hợp hệ thống [8], [9]. Cùng với sự phát triển của cảm biến, bộ điều khiển số, truyền động servo, thị giác máy và trí tuệ nhân tạo, tay máy công nghiệp ngày càng có khả năng làm việc trong các môi trường sản xuất phức tạp hơn, phối hợp tốt hơn với các thiết bị khác trong dây chuyền và từng bước thích ứng với mô hình sản xuất thông minh.

Về quy mô triển khai, số liệu của Liên đoàn Robot Quốc tế cho thấy robot công nghiệp đã duy trì xu hướng tăng trưởng dài hạn trong thập niên gần đây. Báo cáo World Robotics cho biết số robot công nghiệp lắp đặt mới trên toàn cầu đã vượt mốc 500.000 đơn vị mỗi năm trong nhiều năm liên tiếp, trong khi tổng lượng robot đang vận hành trên thế giới đã đạt trên 4 triệu đơn vị [8], [10].

Những con số này phản ánh không chỉ sự gia tăng về số lượng mà còn cho thấy robot công nghiệp đã trở thành hạ tầng kỹ thuật quan trọng trong nhiều ngành sản xuất, đặc biệt ở các lĩnh vực như ô tô, điện tử, cơ khí chế tạo, logistics nội bộ và đóng gói. Sự gia tăng mật độ robot trong nhà máy cũng cho thấy bài toán nâng cao hiệu suất chuyên động, độ tin cậy và tiết kiệm năng lượng của tay máy ngày càng có ý nghĩa thực tiễn rõ rệt.

Một xu hướng đáng chú ý trong giai đoạn gần đây là sự phát triển song song của robot công nghiệp truyền thống và robot cộng tác. Nếu robot công nghiệp truyền thống vẫn chiếm ưu thế trong các nhiệm vụ tốc độ cao, tải trọng lớn và chu kỳ lặp lại nghiêm ngặt, thì robot cộng tác mở rộng khả năng ứng dụng của tay máy vào các công đoạn cần chia sẻ không gian làm việc với con người hoặc cần linh hoạt hơn trong tổ chức sản xuất [9], [11]. Tuy nhiên, bất kể ở dạng truyền thống hay cộng tác, cốt lõi của tay máy công nghiệp vẫn là khả năng tạo ra chuyển động chính xác, ổn định và hiệu quả dưới tác động của hệ truyền động và bộ điều khiển. Điều đó cũng lý giải vì sao các vấn đề về động lực học và điều khiển tiếp tục giữ vai trò trung tâm trong nghiên cứu tay máy robot hiện nay.



*Hình 1.1. Xu hướng tăng trưởng số robot công nghiệp lắp đặt mới trên thế giới giai đoạn gần đây, đơn vị: nghìn robot [8]*

Xét theo cấu trúc cơ học, tay máy công nghiệp ngày nay tồn tại dưới nhiều dạng như robot tọa độ Đề-các, robot trụ, robot cầu, robot SCARA, robot khớp nối nhiều bậc tự do và robot song song [7], [8]. Trong đó, tay máy khớp nối nối tiếp nhiều bậc tự do là cấu hình phổ biến nhất trong các ứng dụng công nghiệp hiện đại nhờ vùng làm việc rộng, tính linh hoạt cao và khả năng thích ứng với nhiều loại nhiệm vụ công nghệ. Tuy nhiên, chính sự gia tăng bậc tự do, liên kết

cơ học và mức độ phi tuyến của cấu trúc cũng làm cho việc mô hình hóa, phân tích động lực học và thiết kế điều khiển trở nên phức tạp hơn. Do đó, quá trình phát triển của tay máy công nghiệp không chỉ là quá trình hoàn thiện phần cứng, mà còn là quá trình phát triển đồng thời các phương pháp mô hình hóa, lập kế hoạch chuyển động và điều khiển tối ưu.

### 1.1.2. Ưu thế của tay máy công nghiệp

Tay máy công nghiệp có nhiều ưu thế trong sản xuất, gia công.

**Thứ nhất** là khả năng làm việc với độ lặp lại cao và duy trì chất lượng thao tác ổn định trong thời gian dài. Trong các công việc như hàn, sơn, lắp ráp, gấp đặt, đóng gói và palletizing, robot có thể thực hiện chuyển động theo quỹ đạo xác định với sai lệch nhỏ, ít chịu ảnh hưởng của mệt mỏi hay dao động chất lượng do yếu tố con người [9], [12]. Đặc tính này đặc biệt quan trọng đối với các dây chuyền sản xuất hàng loạt hoặc các quy trình đòi hỏi tính nhất quán cao giữa các chu kỳ công tác.

**Thứ hai** là khả năng nâng cao năng suất và tính linh hoạt của hệ thống sản xuất. So với các cơ cấu tự động chuyên dùng, tay máy công nghiệp có thể được tái lập trình để thực hiện nhiều nhiệm vụ khác nhau, nhờ đó thích hợp với môi trường sản xuất đa dạng, lô nhỏ hoặc thay đổi nhanh theo yêu cầu thị trường [7], [8]. Trong bối cảnh sản xuất thông minh, khả năng tích hợp robot với hệ thống giám sát, thị giác máy, thiết bị cảm biến và các nền tảng điều hành sản xuất càng làm tăng giá trị của tay máy như một phần tử linh hoạt trong mạng lưới tự động hóa. Điều này giải thích vì sao robot công nghiệp hiện nay không chỉ hiện diện trong các ngành công nghiệp nặng mà còn mở rộng sang điện tử, thực phẩm, kho vận và các lĩnh vực có yêu cầu điều phối linh hoạt.

**Thứ ba** là cải thiện điều kiện lao động và an toàn sản xuất. Nhiều thao tác công nghiệp có tính chất độc hại, nguy hiểm, cường độ cao hoặc lặp lại đơn điệu như hàn hồ quang, phun sơn, thao tác với vật nóng, vật nặng hoặc môi trường có hóa chất. Việc sử dụng tay máy robot giúp giảm mức độ tiếp xúc trực tiếp của con người với các điều kiện làm việc bất lợi đó, đồng thời góp phần chuẩn hóa thao tác công nghệ và giảm sai sót vận hành [9], [11]. Trong xu

hướng sản xuất hiện đại, đây không chỉ là lợi ích về nhân công mà còn là một yêu cầu về phát triển bền vững và quản trị rủi ro kỹ thuật trong nhà máy.



*Robot bốc xếp*



*Robot hàn*



*Robot tác hợp*



*Robot sơn*



*Robot gia công*



*Robot cấp phôi*

*Hình 1.2. Một số ứng dụng của tay máy công nghiệp*

Bên cạnh các ưu thế nêu trên, một lợi thế ngày càng được quan tâm là khả năng tối ưu hóa hiệu quả vận hành, đặc biệt theo các tiêu chí thời gian chu kỳ, tiêu hao năng lượng và độ bền thiết bị. Khi quy mô sử dụng robot trong nhà máy tăng lên, chi phí vận hành và năng lượng dành cho hệ robot trở thành yếu tố đáng kể. Các nghiên cứu gần đây về năng lượng robot công nghiệp cho thấy xu hướng chuyển từ mục tiêu chỉ bảo đảm hoàn thành nhiệm vụ sang mục tiêu vận hành hiệu quả hơn về năng lượng, thời gian và mức độ tác động cơ học [13], [14]. Từ góc nhìn đó, ưu thế của tay máy công nghiệp không chỉ nằm ở khả năng thay thế thao tác thủ công, mà còn ở tiềm năng nâng cao hiệu quả tổng thể của dây chuyền khi chuyển động của robot được thiết kế và điều khiển hợp lý.

## **1.2. Khái quát về phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động tay máy công nghiệp**

Phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động là hai nội dung trung tâm trong nghiên cứu hiện đại về tay máy công nghiệp, có quan hệ chặt chẽ và bổ sung cho nhau trong quá trình mô hình hóa, điều khiển và đánh giá hiệu quả vận hành của hệ [12], [13], [15], [16]. Phân tích động lực học tay máy là quá trình xây dựng và sử dụng mô hình động lực học để xác định mối quan hệ giữa

chuyển động của tay máy với các lực và mômen tác dụng lên hệ trong quá trình làm việc. Nếu bài toán động học chủ yếu làm rõ mối liên hệ giữa các biến khớp và vị trí, vận tốc, gia tốc của điểm tác động cuối, thì bài toán động lực học đi xa hơn khi xem xét ảnh hưởng của khối lượng, mômen quán tính, trọng lực, tải trọng, ma sát, lực cản và sự tương tác giữa các khâu đến lực hoặc mômen dẫn động tại các khớp. Nói cách khác, động lực học là cầu nối giữa mô tả chuyển động và yêu cầu năng lượng - lực của tay máy trong thực tế vận hành [15], [17].

Nếu phân tích động lực học trả lời câu hỏi “để tay máy chuyển động như vậy thì cần lực hoặc mômen gì”, thì tối ưu hóa chuyển động trả lời câu hỏi “tay máy nên chuyển động như thế nào để tốt nhất theo một tiêu chuẩn xác định”. Trong nghiên cứu tay máy robot, “tốt nhất” có thể được hiểu theo nhiều nghĩa khác nhau, chẳng hạn: thời gian thực hiện nhỏ nhất, năng lượng tiêu hao nhỏ nhất, lực hoặc mômen điều khiển nhỏ, quỹ đạo trơn hơn, độ giật nhỏ hơn, độ chính xác bám quỹ đạo cao hơn, hoặc thỏa mãn tốt hơn các ràng buộc va chạm và an toàn. Vì vậy, tối ưu hóa chuyển động là một khái niệm rộng, bao trùm các bài toán lập kế hoạch quỹ đạo, quy hoạch chuyển động, phân bổ thời gian, tối ưu tiêu chuẩn năng lượng và điều khiển tối ưu [13], [17], [18].

Trong thực tế, bài toán tối ưu hóa chuyển động của tay máy thường được xây dựng trên cơ sở các biến trạng thái và biến điều khiển của hệ. Trạng thái có thể là vị trí, vận tốc khớp hoặc trạng thái mở rộng; trong khi biến điều khiển thường là mômen hoặc lực tại các khớp. Khi đó, tối ưu hóa chuyển động có thể được phát biểu dưới dạng bài toán điều khiển tối ưu: tìm tín hiệu điều khiển sao cho hệ tuân theo phương trình động lực học, thỏa mãn điều kiện đầu, điều kiện cuối và các ràng buộc chuyển động, đồng thời cực tiểu hoặc cực đại một hàm mục tiêu cho trước. Theo nghĩa này, điều khiển tối ưu không tách rời tối ưu hóa chuyển động, mà là một cách tiếp cận toán học quan trọng để giải bài toán tối ưu hóa chuyển động của tay máy robot [15].

### **1.3. Tình hình nghiên cứu trên thế giới và trong nước**

### 1.3.1. Vấn đề phân tích động lực học tay máy robot

Tay máy robot bao gồm các khâu là các vật rắn nối với nhau bởi các khớp tạo thành một chuỗi động học mở. Tọa độ suy rộng của tay máy là tập hợp các tham số xác định vị trí của tất cả các khâu thuộc tay máy. Vectơ tọa độ suy rộng hay vectơ mô tả cấu hình của tay máy thường cho bởi

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad (1.1)$$

Trong đó  $n$  là số tọa độ suy rộng của tay máy.

Khâu cuối cùng của tay máy thường là bàn kẹp hoặc là khâu gắn liền với dụng cụ làm việc. Điểm nút của khâu này được gọi là điểm tác động cuối, tương tác trực tiếp với đối tượng ngoài môi trường. Vectơ chứa thông tin vị trí và hướng của điểm tác động cuối được kí hiệu bởi

$$\mathbf{r}_E = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_\beta]^T \quad (1.2)$$

Trong đó  $\beta$  là số tọa độ xác định vị trí điểm tác động cuối.

Xét các động cơ dẫn động đặt tại các khớp, lực/mômen điều khiển (dẫn động) được ký hiệu bởi

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T \quad (1.3)$$

Bài toán động lực học sẽ xác định phương trình động lực học của một tay máy, từ đó tính toán các lực/mômen dẫn động cần thiết thực hiện các chuyển động, xác định các sai số so chuyển động làm cơ sở cho quá trình điều khiển.

Trên thế giới, các nghiên cứu về phân tích động lực học tay máy robot chủ yếu phát triển theo các hướng phương pháp kinh điển, trong đó nổi bật là phương pháp Newton-Euler, phương pháp Lagrange và phương pháp Hamilton. Đây là ba hướng tiếp cận có cơ sở lý thuyết vững chắc, được trình bày tương đối đầy đủ trong các giáo trình và chuyên khảo kinh điển về robot [1], [2], [19], [20].

#### a) Phương pháp Newton-Euler

Khi thiết lập phương trình động lực học, tay máy sẽ được tách thành các khâu riêng rẽ với đầy đủ các lực/mômen hoạt động và liên kết tại các khớp tách.

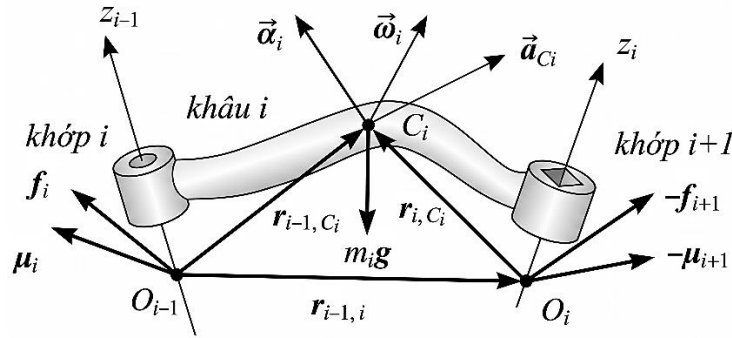
Các phương trình Newton-Euler được viết cho từng khâu. Sau đó, khử các lực liên kết lý tưởng tại các khớp để nhận được phương trình động lực ở dạng tối thiểu, số phương trình bằng số bậc tự do của tay máy.

Phương pháp Newton-Euler sử dụng hai phương trình là phương trình chuyển động khối tâm (phương trình Newton) và phương trình biến thiên mômen động lượng với khối tâm (phương trình động lực Euler) như sau

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_C = \sum \vec{m}_C (\vec{F}_k) \quad (1.5)$$

Sơ đồ tách khâu thứ  $i$  của tay máy được thể hiện như trên **Hình 1.3** với vectơ gia tốc khối tâm  $\vec{a}_{C_i}$ , vectơ vận tốc góc và vectơ gia tốc góc lần lượt là  $\vec{\omega}_i, \vec{\alpha}_i$ .



Hình 1.3. Sơ đồ tách khâu thứ  $i$  [2]

Các lực tác dụng lên khâu thứ  $i$  gồm  $m_i \mathbf{g}$  là trọng lực;  $\mathbf{f}_i, \boldsymbol{\mu}_i$  là lực/mômen tác dụng tại khớp  $i$  từ khâu  $i-1$ ;  $-\mathbf{f}_{i+1}, -\boldsymbol{\mu}_{i+1}$  là lực/mômen tác dụng tại khớp  $i+1$  từ khâu  $i+1$ . Do mỗi khớp của tay máy chuỗi chỉ có một bậc tự do, nên tại mỗi khớp có một lực hoặc mômen hoạt động, năm thành phần còn lại là lực liên kết. Đối với tay máy phẳng, số lực liên kết tại mỗi khớp được tính là hai.

Các phương trình Newton-Euler (1.4) và (1.5) cho khâu thứ  $i$  và được chiếu trong hệ trục tọa độ cơ sở của tay máy (hệ tọa độ cố định) như sau

$$m_i \mathbf{a}_{C_i}^{(0)} = \mathbf{f}_i^{(0)} \quad (1.6)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{C_i}^{(0)} = \mathbf{M}_{C_i}^{(0)} \quad (1.7)$$

Lần lượt viết hệ các phương trình (1.6) và (1.7) cho  $n$  khâu của tay máy chuỗi, ta nhận được hệ  $6n$  phương trình. Số phương trình này đủ để xác định  $6n$  ẩn gồm  $n$  gia tốc khớp  $\ddot{\mathbf{q}}$  và  $5n$  thành phần lực liên kết. Phương pháp khử các lực liên kết này thường được áp dụng trong trường hợp coi các liên kết là lý tưởng.

Phương pháp Newton-Euler thực hiện xác định các lực tác dụng lên từng khâu khi tiến hành tách các khâu liên kết, sau đó giải bài toán động lực học dựa trên các phương trình đã thiết lập. Tuy nhiên, do phải thiết lập các phương trình cho từng khâu nên phương pháp này sẽ cho lời giải tương đối công kềnh, đặc biệt là các cơ hệ gồm nhiều khâu liên kết.

### ***b) Phương pháp Lagrange***

Phương trình Lagrange loại 2 là phương trình vi phân chuyển động ở dạng tọa độ suy rộng đủ chịu liên kết holonom, lý tưởng và được thiết lập dựa trên nguyên lý d'Alembert-Lagrange.

Phương trình Lagrange loại 2 của tay máy chuỗi gồm  $n$  khâu ( $n$  bậc tự do) với  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$  là các tọa độ suy rộng đủ có dạng

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial P}{\partial q_i} + Q_i^{kt} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

Trong đó  $T$  là biểu thức động năng của hệ,  $P$  là hàm thế năng và  $Q_i^{kt}$  là lực suy rộng của các lực không thế.

Phương trình (1.8) có thể được viết lại dưới dạng ma trận [1], [2], [19], [20], Sử dụng phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận có thể giúp ta thiết lập phương trình vi phân chuyển động một cách dễ dàng, có hệ thống.

### ***c) Phương pháp Hamilton***

Trong phần trên, phương trình Lagrange và phương trình Newton-Euler đã được thiết lập sử dụng hệ biến  $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}$ . Các phương trình này được viết trong dạng hệ phương trình vi phân cấp hai. Để đơn giản và thuận tiện cho quá trình giải phương trình chuyển động, một hệ biến khác là dạng biến Hamilton và

phương trình Hamilton được sử dụng để mô tả phương trình chuyển động của tay máy trong hệ phương trình vi phân cấp một.

Hệ biến Hamilton  $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$  thay cho hệ biến  $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}$  bằng cách thay các biến vận tốc suy rộng  $\dot{\mathbf{q}}$  thành các biến  $\mathbf{p}$  gọi là biến liên hợp, xác định bởi

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.9)$$

trong đó:  $L = T - P$  gọi là hàm Lagrange,  $T$  là hàm động năng và  $P$  là hàm thế năng.

Dựa vào hệ biến Hamilton, ta xây dựng hàm Hamilton như sau

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (1.10)$$

trong đó đại lượng vận tốc suy rộng  $\dot{q}_i$  được thay bởi các biến Hamilton dựa vào công thức biến đổi (1.9) và  $\mathbf{p} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$ .

Hệ gồm  $2n$  phương trình vi phân cấp một mô tả chuyển động của tay máy được xây dựng có dạng

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \end{cases} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

với  $Q_i$  là lực suy rộng không thế.

Phương pháp Newton-Euler có ưu điểm là phản ánh rõ ý nghĩa cơ học của các lực và mômen tác dụng trên từng khâu, phù hợp với việc phân tích lực học cục bộ và xây dựng các thuật toán đệ quy. Tuy nhiên, khi số bậc tự do tăng lên, việc thiết lập và khử các lực liên kết thường trở nên cồng kềnh. Trong khi đó, phương pháp Lagrange cho phép thiết lập phương trình chuyển động trực tiếp theo tọa độ suy rộng, có tính hệ thống cao và thuận lợi khi biểu diễn phương trình động lực học dưới dạng ma trận. Vì vậy, đây là hướng được sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu động lực học tay máy cũng như trong các bài toán điều

khiển. Phương pháp Hamilton lại có ưu điểm khi chuyển hệ phương trình vi phân cấp hai về hệ phương trình vi phân cấp một theo biến liên hợp, do đó thuận lợi hơn khi kết hợp với bài toán điều khiển tối ưu và các phương pháp biến phân.

**d) Phương trình chuyển động của tay máy chịu ràng buộc**

Xét tay máy gồm các khâu là các vật rắn, có vị trí được xác định bởi  $n$  tọa độ suy rộng là  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$ , chịu  $r$  liên kết hólônôm giữ và lý tưởng với phương trình liên kết dạng

$$f_\alpha(\mathbf{q}, t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, r \quad (1.12)$$

Phương trình chuyển động của cơ hệ cần được viết trong dạng

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial P}{\partial q_i} + Q_i^{kt} + Q_i^* \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.13)$$

trong đó  $Q_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) là lực suy rộng của các phản lực liên kết.

Để hoàn thiện được việc thiết lập được phương trình (1.13), có hai phương pháp thường được sử dụng là: Phương trình Lagrange dạng nhân tử và Phương trình chuyển động với Nguyên lý Phù hợp.

Phương pháp Lagrange dạng nhân tử đưa thêm  $n$  nhân tử Lagrange và các phản lực của liên kết được thay thế bằng biểu thức sau

$$Q_i^* = - \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (1.14)$$

trong đó  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) gọi là các nhân tử Lagrange.

Các phương trình Lagrange dạng nhân tử sẽ có dạng

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial P}{\partial q_i} + Q_i^{kt} - \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.15)$$

Như vậy, các phương trình (1.12) và (1.15) tạo thành một hệ  $n + r$  phương trình vi phân đại số. Chúng được sử dụng để xác định  $n$  tọa độ suy rộng và  $r$  nhân tử Lagrange.

Theo Nguyên lý Phù hợp [1], đối với cơ hệ chịu liên kết cơ học lý tưởng thì lực suy rộng của các phản lực liên kết  $Q_i^*$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{j=1}^m d_{\sigma j} Q_j^* = 0 ; \sigma = 1, 2, \dots, n-r \quad (1.16)$$

với  $d_{j\sigma}$  ( $j=1,2,\dots,n; \sigma=1,2,\dots,n-r$ ) là các hệ số, có thể được xác định khi biểu diễn các gia tốc (vận tốc) suy rộng qua các gia tốc (vận tốc) suy rộng độc lập từ các phương trình liên kết (1.12).

Lúc này, kết hợp với đạo hàm theo thời gian của phương trình liên kết (1.12) tạo thành một hệ  $n$  phương trình vi phân để xác định  $n$  tọa độ suy rộng.

Nhìn chung, có thể thấy rằng các phương pháp phân tích động lực học tay máy robot đã được xác lập tương đối đầy đủ và hiệu quả của chúng đã được kiểm chứng qua nhiều công trình nghiên cứu cũng như qua thực tiễn ứng dụng. Vì vậy, trong giai đoạn gần đây, các nghiên cứu quốc tế ít tập trung vào việc đánh giá lại các phương pháp nền tảng một cách độc lập, mà chủ yếu phát triển theo các hướng mở rộng và ứng dụng chuyên sâu hơn. Một số hướng có thể kể đến là xây dựng mô hình động lực học có khả năng tính toán nhanh cho điều khiển thời gian thực, nhận dạng tham số động lực học, xét ảnh hưởng của ma sát, khe hở khớp, đàn hồi liên kết, hoặc kết hợp mô hình cơ học với dữ liệu thực nghiệm nhằm nâng cao độ chính xác mô hình [18], [20], [21]. Tuy nhiên, về bản chất, các nghiên cứu này vẫn kế thừa trực tiếp hệ cơ sở lý thuyết đã có, thay vì thay đổi nền tảng phương pháp luận của bài toán phân tích động lực học tay máy.

Ở trong nước, nghiên cứu về phân tích động lực học tay máy robot cũng chủ yếu phát triển trên cơ sở kế thừa các phương pháp kinh điển nêu trên. Nhiều tài liệu chuyên khảo và giáo trình đã trình bày khá hệ thống bài toán động lực học tay máy robot, các cách xây dựng phương trình chuyển động và ứng dụng trong điều khiển robot. Các công trình nghiên cứu trong nước thường tập trung vào việc thiết lập mô hình động lực học cho các cấu hình tay máy cụ thể, phục vụ mô phỏng và thiết kế điều khiển, hơn là đề xuất các phương pháp hoàn toàn

mới. Xu hướng này là phù hợp, bởi đối với bài toán động lực học tay máy, điều quan trọng không phải là thay thế các phương pháp nền tảng đã được khẳng định, mà là lựa chọn và sử dụng phương pháp thích hợp với đặc điểm của bài toán nghiên cứu.

### **1.3.2. Vấn đề tối ưu hoá chuyển động của tay máy robot**

#### *1.3.2.1. Khái quát các hướng tiếp cận trong tối ưu hóa chuyển động tay máy robot*

Tối ưu hóa chuyển động tay máy robot là một hướng nghiên cứu đã được quan tâm từ sớm và ngày càng phát triển cùng với yêu cầu nâng cao năng suất, độ chính xác và hiệu quả vận hành của robot công nghiệp. Nếu ở mức đơn giản, bài toán chỉ yêu cầu tay máy di chuyển từ trạng thái đầu đến trạng thái cuối hoặc bám theo một quỹ đạo cho trước, thì ở mức cao hơn, chuyển động của tay máy cần được thiết kế sao cho thỏa mãn một tiêu chuẩn tối ưu nhất định, chẳng hạn như thời gian nhỏ nhất, năng lượng tiêu hao nhỏ nhất, nỗ lực điều khiển nhỏ **nhất**, hoặc đồng thời bảo đảm nhiều ràng buộc về quỹ đạo, vận tốc, gia tốc và điều kiện công nghệ [19], [20], [22]-[25]. Vì vậy, tối ưu hóa chuyển động tay máy robot không chỉ là bài toán lập quỹ đạo theo nghĩa hình học, mà là một bài toán tổng hợp, gắn chặt với mô hình động lực học và phương pháp điều khiển của hệ.

Trong các nghiên cứu đã công bố, có thể quy các hướng tiếp cận chính của bài toán tối ưu hóa chuyển động tay máy robot thành ba nhóm lớn, gồm: quy hoạch động, phương pháp trực tiếp và phương pháp gián tiếp. Bên cạnh đó, trong những năm gần đây còn xuất hiện thêm các hướng mở rộng như điều khiển dự báo mô hình, học tăng cường, tối ưu đa mục tiêu và các phương pháp kết hợp giữa mô hình vật lý với dữ liệu [26]-[32]. Tuy nhiên, về bản chất, phần lớn các nghiên cứu hiện nay vẫn có thể quy về ba hướng chính nêu trên.

Hướng thứ nhất là quy hoạch động, xuất phát từ nguyên lý tối ưu Bellman và việc giải phương trình Hamilton–Jacobi–Bellman. Ưu điểm của hướng này là cơ sở lý thuyết chặt chẽ và có thể phát biểu bài toán ở dạng tổng quát. Tuy nhiên, khi áp dụng cho tay máy robot nhiều bậc tự do, đặc biệt là các bài toán

có ràng buộc phi tuyến và không gian trạng thái lớn, phương pháp này thường gặp khó khăn do khối lượng tính toán rất lớn và hiện tượng bùng nổ số chiều [33], [34], [35]. Vì vậy, mặc dù có giá trị học thuật và được sử dụng trong một số nghiên cứu tiêu biểu, quy hoạch động không phải là hướng tiếp cận được dùng phổ biến nhất đối với các bài toán tay máy công nghiệp có mô hình động lực học phức tạp.

Hướng thứ hai là phương pháp trực tiếp, trong đó bài toán điều khiển tối ưu ban đầu được chuyển về một bài toán tối ưu hữu hạn chiều thông qua việc tham số hóa quỹ đạo hoặc tín hiệu điều khiển [22], [36]. Phương pháp này được sử dụng khá rộng rãi trong các bài toán tối ưu quỹ đạo, tối ưu thời gian, tối ưu độ giật, tối ưu năng lượng hoặc tối ưu đa mục tiêu [37]-[44]. Tuy nhiên, phương pháp trực tiếp cũng bộc lộ một số hạn chế. Trước hết, nghiệm tối ưu phụ thuộc đáng kể vào cách tham số hóa quỹ đạo, cách xây dựng hàm mục tiêu và thuật toán tối ưu được lựa chọn. Bên cạnh đó, lời giải thu được chủ yếu mang tính số, nên thường khó làm rõ cấu trúc của điều khiển tối ưu cũng như mối liên hệ nội tại giữa quy luật chuyển động, lực hoặc mômen dẫn động và mô hình động lực học của tay máy. Do đó, mặc dù có ưu thế về tính linh hoạt, phương pháp trực tiếp không phải lúc nào cũng là lựa chọn phù hợp nếu mục tiêu nghiên cứu là làm rõ bản chất cơ học của bài toán tối ưu chuyển động.

Hướng thứ ba là phương pháp gián tiếp, trong đó bài toán tối ưu hóa chuyển động được xây dựng trực tiếp trên cơ sở mô hình động lực học, sau đó sử dụng phương pháp biến phân hoặc nguyên lý cực đại Pontryagin để thiết lập các điều kiện cần tối ưu [45]-[47]. So với phương pháp trực tiếp, hướng tiếp cận này cho phép khai thác rõ hơn cấu trúc động lực học của hệ và làm xuất hiện trực tiếp các biến liên hợp, hàm Hamilton cũng như điều kiện cực trị đối với biến điều khiển. Vì vậy, phương pháp gián tiếp đặc biệt phù hợp với các bài toán mà tiêu chuẩn tối ưu gắn trực tiếp với lực/mômen dẫn động, năng lượng tiêu hao, hoặc với các bài toán cần xét rõ vai trò của điều kiện biên và ràng buộc quỹ đạo trong khuôn khổ động lực học của tay máy [45], [48]. Mặc dù việc giải bài toán biên hai điểm thu được từ phương pháp này thường khó khăn

hơn về mặt số, song giá trị của nó nằm ở chỗ làm rõ được cấu trúc điều khiển tối ưu trên cơ sở cơ học của hệ.

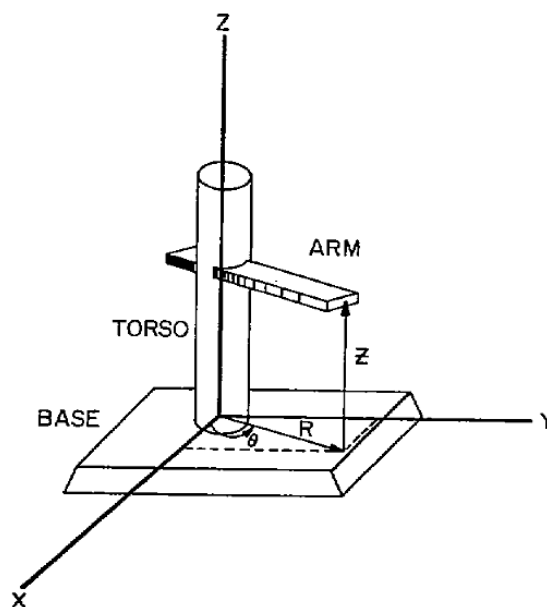
Một xu hướng nghiên cứu đáng chú ý khác là sự chuyển dịch từ các bài toán tối ưu thời gian thuần túy sang các bài toán tối ưu đa mục tiêu. Trong đó, một nhóm nghiên cứu tập trung vào tiêu chí năng lượng và hiệu quả vận hành, nhằm giảm tiêu hao năng lượng và nâng cao hiệu quả sử dụng robot công nghiệp [22], [27], [49]. Một nhóm khác nhấn mạnh độ giat, độ trơn quỹ đạo và chất lượng động học của chuyển động, qua đó cải thiện độ êm dịu và giảm tác động cơ học bất lợi lên cơ cấu [50]-[52]. Bên cạnh đó, nhiều nghiên cứu xem xét sự phối hợp giữa thời gian, mômen điều khiển và các ràng buộc quỹ đạo hoặc vật cản, hướng tới các quỹ đạo vừa nhanh vừa khả thi trong điều kiện làm việc thực tế [41], [43]-[55]. Ngoài ra, trong bối cảnh robot cộng tác và robot công nghiệp hiện đại, một số công trình còn quan tâm đến an toàn người-máy và tính chấp nhận của chuyển động như một tiêu chí cần xét cùng với hiệu quả vận hành [11], [51]. Điều này phản ánh yêu cầu mới của robot công nghiệp hiện đại: tay máy không chỉ cần hoàn thành nhiệm vụ, mà còn phải làm việc theo phương án chuyển động hợp lý, ổn định và tiết kiệm năng lượng. Tuy vậy, sự phong phú của các tiêu chí và hướng tiếp cận cũng dẫn đến tình trạng các nghiên cứu bị phân tán theo từng dạng bài toán, từng loại hàm mục tiêu và từng cách phát biểu bài toán tối ưu.

#### *1.3.2.2. Các nghiên cứu theo hướng tiếp cận phương pháp quy hoạch động*

Quy hoạch động là một trong những hướng tiếp cận sớm được sử dụng trong bài toán tối ưu hóa chuyển động tay máy robot. Với cách tiếp cận này, bài toán có thể được phát biểu ở dạng tổng quát, cho phép xét đồng thời nhiều loại ràng buộc và nhiều dạng hàm mục tiêu khác nhau [24], [35]. Chính vì vậy, quy hoạch động từng được xem là một công cụ quan trọng trong giai đoạn đầu của các nghiên cứu về tối ưu hóa chuyển động tay máy robot.

Một trong những công trình tiêu biểu theo hướng này là nghiên cứu của Shin và McKay năm 1986 [35]. Các tác giả đã xem xét bài toán lập kế hoạch quỹ đạo cho tay máy robot trên một đường chuyển động cho trước bằng cách

tham số hóa chuyển động theo quỹ đạo hình học, sau đó áp dụng quy hoạch động để xác định quy luật thời gian tối ưu. Kết quả của nghiên cứu cho thấy phương pháp này có khả năng xử lý bài toán tối ưu thời gian khi tay máy chuyển động dưới các ràng buộc động lực học. Công trình có ý nghĩa ở chỗ đã chỉ ra rằng đối với tay máy robot, việc tối ưu hóa chuyển động không chỉ dừng ở việc xác định đường đi hình học, mà còn phải xét tới bài toán phân bố vận tốc dọc theo quỹ đạo. Tuy nhiên, mô hình nghiên cứu vẫn chủ yếu phù hợp với các bài toán có cấu trúc tương đối đặc thù, chưa phản ánh đầy đủ mức độ phức tạp của các tay máy công nghiệp nhiều bậc tự do.



*Hình 1.4. Mô hình tay máy Bendix PACS trong nghiên cứu sớm về điều khiển tối ưu robot[35]*

Tiếp theo đó, Balkan năm 1998 [33] đã phát triển một cách tiếp cận quy hoạch động cho bài toán điều khiển tối ưu của tay máy robot. So với các nghiên cứu thiên về lập kế hoạch quỹ đạo trước đó, công trình này nhấn mạnh hơn việc xử lý bài toán điều khiển tối ưu trên cơ sở mô hình động lực học của hệ. Nghiên cứu cho thấy quy hoạch động có thể được sử dụng để tìm điều khiển tối ưu cho tay máy dưới một hàm chi phí xác định.

Một hạn chế cơ bản của quy hoạch động trong bài toán tay máy robot là hiện tượng bùng nổ số chiều. Đối với một tay máy nhiều bậc tự do, không gian trạng thái thường có số chiều lớn do bao gồm cả biến vị trí và vận tốc, thậm chí

còn có thể mở rộng hơn nếu xét thêm các ràng buộc hoặc trạng thái phụ trợ. Khi đó, việc rời rạc hóa không gian trạng thái hoặc xấp xỉ hàm giá trị để giải phương trình Hamilton–Jacobi–Bellman đòi hỏi khối lượng tính toán rất lớn, làm giảm đáng kể tính khả thi của phương pháp đối với các bài toán robot công nghiệp thực tế [33].

Nhằm khắc phục phần nào hạn chế đó, một số nghiên cứu sau này đã phát triển các biến thể của quy hoạch động theo hướng giảm tải tính toán hoặc kết hợp với các phương pháp khác. Nghiên cứu của Kaserer, Gattringer và Müller năm 2019 [34] là một ví dụ đáng chú ý. Các tác giả đã xem xét bài toán bám đường gần tối ưu với các ràng buộc về độ giạt và tốc độ thay đổi mômen, tức là các đại lượng có ý nghĩa trực tiếp đối với chất lượng động học và giới hạn làm việc của cơ cấu chấp hành. Công trình này cho thấy quy hoạch động vẫn có thể được vận dụng trong các bài toán tối ưu hóa chuyển động có ràng buộc động học nâng cao. Tuy nhiên, bản thân việc phải khai thác cấu trúc đặc thù của bài toán để đạt được lời giải gần tối ưu cũng phản ánh một thực tế rằng quy hoạch động khó có thể áp dụng một cách linh hoạt và tổng quát cho nhiều dạng tay máy và nhiều dạng bài toán chuyển động khác nhau.

Một hướng mở rộng khác là kết hợp quy hoạch động với học máy hoặc học tăng cường. Trong nghiên cứu của Ouyang, Dong và Sun năm 2022 [26], bài toán điều khiển tối ưu cho tay máy robot dưới các ràng buộc đặt trước được tiếp cận bằng học tăng cường. Các tác giả đã xây dựng hệ sai số có xét ràng buộc và sử dụng bộ học critic để xấp xỉ thành phần tối ưu của điều khiển. Kết quả mô phỏng cho thấy phương pháp đề xuất có khả năng cải thiện hiệu quả điều khiển trong điều kiện có ràng buộc. Các nghiên cứu như vậy cho thấy hướng quy hoạch động đang được mở rộng theo hướng thích nghi hơn với các bài toán phi tuyến phức tạp. Tuy nhiên, khi chuyển sang các cấu trúc học xấp xỉ, bài toán lại phát sinh thêm những vấn đề mới liên quan đến tính ổn định, khả năng hội tụ, chất lượng dữ liệu huấn luyện và mức độ giải thích được của nghiệm tối ưu. Vì vậy, các biến thể này tuy làm phong phú thêm hướng quy hoạch động, nhưng cũng không loại bỏ được hoàn toàn các khó khăn cơ bản của phương pháp.

Nhìn chung, các nghiên cứu theo hướng quy hoạch động có giá trị chủ yếu ở việc đặt nền tảng cho bài toán tối ưu hóa chuyển động tay máy robot trên cơ sở lý thuyết tối ưu động. Tuy nhiên, khi xét tới các tay máy công nghiệp nhiều bậc tự do, có mô hình động lực học phi tuyến và các bài toán chuyển động có điều kiện biên hoặc ràng buộc quỹ đạo cụ thể, quy hoạch động thường gặp trở ngại lớn về tính khả thi tính toán. Đây là lý do quan trọng khiến dù có nền tảng lý thuyết chặt chẽ, quy hoạch động không trở thành hướng tiếp cận chủ đạo trong đa số các nghiên cứu tối ưu hóa chuyển động tay máy công nghiệp hiện nay.

### *1.3.2.3. Các nghiên cứu theo hướng phương pháp trực tiếp*

Về bản chất, với hướng tiếp cận này, bài toán điều khiển tối ưu ban đầu không được xử lý thông qua việc xây dựng trực tiếp các điều kiện cần tối ưu, mà được chuyển thành một bài toán tối ưu hữu hạn chiều bằng cách tham số hóa quỹ đạo trạng thái hoặc tín hiệu điều khiển. Sau đó, bài toán được giải bằng các công cụ tối ưu số, thường dưới dạng quy hoạch phi tuyến [22], [36].

Một trong những công trình tiêu biểu cho hướng tiếp cận này là nghiên cứu của Kim và cộng sự năm 2010 [37], trong đó bài toán lập kế hoạch quỹ đạo tối ưu thời gian cho robot công nghiệp được khảo sát theo hướng thực dụng. Các tác giả tập trung vào việc xây dựng một phương pháp có khả năng ứng dụng trong môi trường robot công nghiệp, nơi thời gian chu kỳ có ảnh hưởng trực tiếp đến năng suất của dây chuyền sản xuất. Kết quả nghiên cứu cho thấy quỹ đạo chuyển động có thể được cải thiện theo hướng rút ngắn thời gian thực hiện mà vẫn bảo đảm các điều kiện làm việc của robot.

Theo hướng tối ưu thời gian gắn với ứng dụng công nghệ cụ thể, Zhang và Zhao năm 2016 [38] đã nghiên cứu tay máy robot trong các nhiệm vụ khoan và hàn điểm. Nghiên cứu cho thấy khi bài toán được phát biểu theo cách phù hợp với nhiệm vụ công nghệ, có thể xây dựng được quy luật chuyển động rút ngắn thời gian thao tác. Công trình này phản ánh khá rõ ưu thế của phương pháp trực tiếp trong các ứng dụng mà mục tiêu tối ưu và các ràng buộc đã được xác định rõ. Tuy nhiên, cũng như nhiều nghiên cứu cùng loại, bài toán chủ yếu

được xử lý ở góc độ tối ưu quỹ đạo và khai thác thuật toán tối ưu số, trong khi sự liên hệ giữa lời giải tối ưu với cấu trúc động lực học và điều khiển của hệ chưa được làm nổi bật.

Một nhánh phát triển quan trọng của phương pháp trực tiếp là tối ưu quỹ đạo theo tiêu chí thời gian - độ giật hoặc độ trơn chuyển động. Trong công trình của Gasparetto và Zanotto năm 2008 [39], các tác giả đã đề xuất một kỹ thuật lập kế hoạch quỹ đạo tối ưu độ giật cho robot. Điểm đáng chú ý của nghiên cứu này là chuyển trọng tâm từ bài toán tối ưu thời gian đơn thuần sang bài toán đồng thời xét tới độ êm của chuyển động. Kết quả cho thấy khi giảm được độ giật, chất lượng động học của quỹ đạo được cải thiện, qua đó có thể giảm sóc cơ học và nâng cao tính ổn định của chuyển động. Sau này, hướng nghiên cứu này tiếp tục được phát triển trong nhiều công trình khác, chẳng hạn như nghiên cứu của Wang và cộng sự năm 2022 [56], Zhou và cộng sự năm 2023 [57], S. Ye và cộng sự năm 2025 [58] và C. Qian và cộng sự năm 2025 [59], trong đó tính liên tục của độ giật được nhấn mạnh hơn nữa đối với quỹ đạo của robot công nghiệp. Điều này cho thấy phương pháp trực tiếp đặc biệt phù hợp với các bài toán mà quỹ đạo cần được thiết kế để đáp ứng đồng thời các yêu cầu về thời gian và độ trơn.

Ngoài các phương pháp tối ưu số cổ điển, nhiều nghiên cứu theo hướng trực tiếp còn khai thác các thuật toán lai (heuristic và metaheuristic). Chẳng hạn, trong nghiên cứu của Tangpattanakul, Meesomboon và Artrit năm 2010 [60], thuật toán tìm kiếm hài hoà (Harmony Search) được sử dụng để tối ưu quỹ đạo tay máy robot. Tương tự, một số công trình khác sử dụng thuật toán di truyền (Genetic Algorithm), thuật toán tối ưu bầy đàn (Particle Swarm Optimization) hoặc các kỹ thuật tối ưu lai để xử lý bài toán quỹ đạo tối ưu [3], [22], [60]. Hướng tiếp cận này cho phép mở rộng khá linh hoạt bài toán tối ưu, đặc biệt khi hàm mục tiêu phức tạp hoặc khó biểu diễn dưới dạng thuận lợi cho các thuật toán sử dụng gradient. Một số nhược điểm thường gặp là chất lượng nghiệm phụ thuộc mạnh vào lựa chọn tham số thuật toán, thời gian tính toán có thể lớn, và khó đánh giá chặt chẽ về mặt lý thuyết đối với tính tối ưu của nghiệm.

#### 1.3.2.4. Các nghiên cứu theo hướng phương pháp gián tiếp

Phương pháp gián tiếp là một hướng tiếp cận quan trọng trong bài toán tối ưu hóa chuyển động tay máy robot, đặc biệt khi bài toán được phát biểu trực tiếp trên cơ sở mô hình động lực học của hệ. Khác với phương pháp trực tiếp, trong đó quỹ đạo hoặc điều khiển thường được tham số hóa trước rồi đưa về bài toán tối ưu số hữu hạn chiều, phương pháp gián tiếp xây dựng các điều kiện cần tối ưu thông qua giải tích biến phân hoặc nguyên lý cực đại Pontryagin, từ đó dẫn tới một hệ phương trình vi phân biên hai điểm gồm phương trình trạng thái, phương trình biến liên hợp, điều kiện cực trị của điều khiển và các điều kiện biên tương ứng [46]. Theo nghĩa đó, phương pháp gián tiếp không chỉ nhằm tìm một nghiệm số khả thi, mà còn hướng tới việc làm rõ cấu trúc của điều khiển tối ưu trên cơ sở cơ học và động lực học của tay máy.

Các nghiên cứu theo hướng tiếp cận này xuất hiện khá sớm trong lĩnh vực robot. Một tài liệu thường được nhắc tới là luận án của Borrow năm 1982 [47], trong đó bài toán điều khiển tối ưu đối với tay máy robot đã được đặt ra như một vấn đề nghiên cứu độc lập. Mặc dù công trình này thuộc giai đoạn đầu của lĩnh vực, nó cho thấy từ khá sớm đã tồn tại xu hướng tiếp cận bài toán chuyển động tay máy không chỉ như một bài toán điều khiển bám quỹ đạo đơn thuần, mà như một bài toán tối ưu hóa với hệ thống có cấu trúc động lực học rõ ràng. Ý nghĩa của giai đoạn này nằm ở chỗ nó đặt nền cho việc áp dụng các công cụ tối ưu động vào tay máy robot, đặc biệt đối với những bài toán mà biến điều khiển có ý nghĩa vật lý trực tiếp như lực hoặc mômen tại khớp.

Năm 1986, Dubowsky, Norris và Shiller [61] đã khảo sát bài toán lập kế hoạch quỹ đạo tối ưu thời gian cho tay máy robot có xét tránh vật cản. Tiếp đó, Shiller năm 1992 [62] đã nghiên cứu bài toán chuyển động tối ưu thời gian có xét đến các điểm kỳ dị động lực học. Các nghiên cứu này cho thấy rằng đối với tay máy robot, các yếu tố như kỳ dị động lực học hay hình dạng đường đi có thể ảnh hưởng trực tiếp đến khả năng đạt tối ưu.

Theo hướng tối ưu hóa quỹ đạo trên cơ sở mô hình động lực học, các nghiên cứu của Saramago và Steffen Jr. năm 1998 [55] và năm 2000 [56] cũng

có ý nghĩa đáng chú ý. Trong công trình năm 1998, các tác giả đã xem xét bài toán tối ưu quỹ đạo của tay máy có xét đầy đủ hơn đến động lực học của hệ. Đến năm 2000, bài toán được mở rộng sang trường hợp có vật cản chuyển động. Các nghiên cứu này cho thấy phương pháp gián tiếp có thể được áp dụng cho những bài toán phức tạp hơn so với trường hợp chuyển động tự do đơn giản. Tuy nhiên, một đặc điểm chung của nhóm nghiên cứu này là phần lớn vẫn thiên về việc chứng minh khả năng giải bài toán tối ưu cho những mô hình cụ thể hoặc những kịch bản được đặt trước, trong khi mức độ khái quát hóa thành một hướng phương pháp có thể áp dụng linh hoạt cho các bài toán chuyển động điển hình của tay máy công nghiệp còn chưa nhiều.

Năm 2010, Nikoobin và Moradi đã mở rộng bài toán tối ưu điều khiển sang trường hợp trong đó trạng thái, điều khiển và cả các tham số hằng như giá trị đối trọng được xác định đồng thời để cực tiểu hóa một chỉ tiêu hiệu năng cho nhiệm vụ chuyển động điểm-điểm của tay máy robot [63]. Công trình này cho thấy bằng cách mở rộng bài toán tối ưu để chứa thêm tham số, rồi áp dụng nguyên lý cực tiểu Pontryagin, có thể thu được hệ điều kiện tối ưu dẫn tới bài toán biên hai điểm giải bằng số; kết quả mô phỏng cho thấy cách tiếp cận làm giảm đáng kể giá trị hàm mục tiêu so với các phương án không cân bằng, cân bằng tĩnh hoặc cân bằng thích nghi. Điểm đáng chú ý ở đây phương pháp gián tiếp có thể mở rộng để xử lý các biến thiết kế và tham số cơ khí bên cạnh biến điều khiển.

Asgari và Nikoobin năm 2020 tiếp tục nghiên cứu bài toán ném tối ưu bằng tay máy được phát biểu thành một bài toán điều khiển tối ưu với mục tiêu tối thiểu nỗ lực điều khiển trong một thời gian cuối cho trước [64]. Điểm mạnh của nghiên cứu này là cho thấy phương pháp gián tiếp có thể xử lý được một lớp bài toán động lực học, nơi điều kiện cuối không cố định hoàn toàn mà gắn với điều kiện phóng vật thể tới đích. Kết quả mô phỏng và thực nghiệm cho thấy khung bài toán là khả thi. Đây là một bài toán tương đối đặc thù, rất có giá trị về phương pháp mặc dù nó không trực tiếp giải quyết các trường hợp chuyển động chuẩn của tay máy công nghiệp như chuyển động điểm-điểm thông thường hoặc chuyển động theo quỹ đạo định sẵn.

Để đánh giá hiệu quả của việc lựa chọn hàm chi phí, Hedy César Ramírez-de-Ávila năm 2021 [65] đã so sánh một hàm chi phí dạng chuẩn thường gặp với một hàm chi phí có chứa thành phần tensor khối lượng, đều hướng đến mục tiêu tối thiểu hóa nỗ lực điều khiển. Mô phỏng số được áp dụng cho tay máy robot phẳng 2 bậc tự do với nhiều dạng hàm mục tiêu khác nhau. Kết quả cho thấy có sự khác nhau giữa hàm chi phí thường dùng và hàm chi phí có xét tensor khối lượng, có thể tham khảo làm cơ sở để phát triển đi sâu vào các bài toán chuyển động công nghiệp cụ thể, điển hình.

Từ các công trình đã công bố có thể thấy rằng phương pháp gián tiếp đã chứng minh được khả năng xử lý nhiều lớp bài toán điều khiển tối ưu khác nhau. Ưu điểm nổi bật của hướng tiếp cận này là làm rõ được cấu trúc của bài toán tối ưu trên cơ sở mô hình động lực học, từ đó thiết lập trực tiếp mối liên hệ giữa trạng thái, biến liên hợp, điều khiển và các điều kiện biên. Đối với các bài toán mà tiêu chuẩn tối ưu gắn chặt với lực/mômen khớp, đây là một lợi thế quan trọng.

#### *1.3.2.5. Các nghiên cứu trong nước*

Một công trình có tính ứng dụng là nghiên cứu của Lê Anh Kiệt và cộng sự năm 2016 [4] về thiết kế, chế tạo hệ thống điều khiển robot bốc xếp AKB. Trong công trình này, robot bốc xếp được thiết kế và chế tạo phục vụ ứng dụng thực tế, trong đó quỹ đạo chuyển động được xây dựng theo phương pháp lập bảng tọa độ đặt và huấn luyện thông qua bộ lệnh biên dịch. Cách tiếp cận này cho phép robot thực hiện nhiệm vụ chuyển động theo yêu cầu, đồng thời tối ưu theo hướng đơn giản hóa thao tác lập quỹ đạo và rút ngắn đường đi.

Theo hướng tối ưu tham số điều khiển để nâng cao chất lượng đáp ứng, Dương Xuân Biên và Chu Anh Mỹ năm 2018 [5] đã nghiên cứu bài toán thiết kế bộ điều khiển cho tay máy có khâu cứng-mềm, trong đó các thông số của bộ điều khiển PID được tối ưu bằng thuật toán tối ưu bầy đàn (PSO) nhằm nâng cao độ chính xác vị trí. Công trình này cho thấy tối ưu hóa trong nghiên cứu tay máy robot ở trong nước bước đầu đã được quan tâm không chỉ ở mức quỹ đạo, mà còn ở mức điều chỉnh tham số điều khiển. Kết quả nghiên cứu cho thấy

việc sử dụng thuật toán tối ưu có thể cải thiện chất lượng điều khiển của hệ, độ chính xác vị trí của tay máy robot được nâng cao.

Ở góc độ tối ưu chuyển động hình học, Nguyễn Mai Quyên, Chu Bình Minh và Hà Bình Minh năm 2022 [6] đã trình bày một phương pháp tính toán và tối ưu hóa các góc quay khớp trong điều khiển cánh tay robot ba bậc tự do phẳng. Bài toán được đặt ra là xác định các góc quay sao cho điểm tác động cuối di chuyển đến vị trí cho trước với giả định tối ưu hóa năng lượng thông qua cực tiểu hóa các góc quay theo một thứ tự ưu tiên. Công trình này có ý nghĩa ở chỗ đã tiếp cận bài toán chuyển động tay máy từ góc nhìn tối ưu hóa, tuy nhiên cách phát biểu bài toán vẫn chủ yếu dựa trên quan hệ hình học của tay máy robot.

Lưu Thị Huế và Nguyễn Phạm Thục Anh năm 2022 [3] đã đề xuất một phương pháp thiết kế quỹ đạo tối ưu cho robot sử dụng thuật toán di truyền. Trong công trình này, quá trình tối ưu được thực hiện bằng cách xét các ràng buộc về mômen, vị trí và vận tốc khớp, từ đó thu được quỹ đạo điểm cuối tối ưu theo tiêu chí thời gian. Kết quả cho thấy phương pháp có thể giải quyết đồng thời bài toán tối ưu quỹ đạo và bài toán điều khiển bám quỹ đạo. Đây là một nghiên cứu đáng chú ý vì đã chuyển từ tối ưu các biến hình học đơn giản sang tối ưu quỹ đạo có xét tới các ràng buộc vận hành.

#### *1.3.2.6. Nhận xét về tình hình nghiên cứu tối ưu hoá chuyển động tay máy robot*

Từ các nghiên cứu đã tổng quan có thể thấy rằng, trên thế giới, bài toán tối ưu hóa chuyển động tay máy robot đã được nghiên cứu theo nhiều hướng tiếp cận khác nhau và đã đạt được những kết quả đáng kể. Điều đó cho thấy tối ưu hóa chuyển động tay máy robot là một lĩnh vực nghiên cứu có chiều sâu, phát triển theo hướng ngày càng gần hơn với các yêu cầu thực tế của robot công nghiệp.

Xét về các hướng tiếp cận, có thể thấy rằng mỗi nhóm phương pháp đều có ưu điểm và hạn chế riêng. Quy hoạch động có cơ sở lý thuyết chặt chẽ, cho phép phát biểu bài toán ở dạng tổng quát, nhưng gặp trở ngại lớn về khối lượng tính toán khi áp dụng cho các hệ nhiều bậc tự do hoặc bài toán có không gian

trạng thái lớn. Phương pháp trực tiếp có ưu thế ở tính linh hoạt trong triển khai bằng phương pháp số, tuy nhiên chính vì nghiêng nhiều về mặt giải số, phương pháp trực tiếp cũng có những giới hạn nhất định khi mà nghiệm thu được phụ thuộc khá mạnh vào cách tham số hóa quỹ đạo, lựa chọn hàm mục tiêu và thuật toán tối ưu và khi số biến tối ưu lớn hoặc bài toán có nhiều ràng buộc phi tuyến, việc tìm nghiệm ổn định và có ý nghĩa vật lý cũng gặp khó khăn.

Đối với phương pháp gián tiếp và điều khiển tối ưu, các công trình đã công bố cho thấy đây là hướng tiếp cận có khả năng khai thác trực tiếp mô hình động lực học của tay máy để xây dựng điều kiện cần tối ưu. Các nghiên cứu theo hướng này đã được sử dụng cho nhiều lớp bài toán với các tiêu chí tối ưu khác nhau. Các kết quả này khẳng định rằng phương pháp gián tiếp vẫn còn giá trị lý thuyết, việc đề xuất một khung nghiên cứu tương đối thống nhất cho các lớp chuyển động có ý nghĩa công nghiệp vẫn còn hiện hữu.

Với các nghiên cứu trong nước về tối ưu hóa chuyển động tay máy robot, hiện nay đã tiếp cận một số hướng như tối ưu quỹ đạo, tối ưu góc khớp, tối ưu tham số điều khiển và ứng dụng các thuật toán tối ưu. Đây là những kết quả có ý nghĩa thực tiễn nhất định, cho thấy vấn đề tối ưu hóa chuyển động của tay máy robot đã được quan tâm trong bối cảnh nghiên cứu và ứng dụng trong nước. So với các nghiên cứu trên thế giới, nghiên cứu trong nước về tối ưu hóa chuyển động và điều khiển tối ưu tay máy robot còn hạn chế hơn cả về số lượng công bố lẫn mức độ đa dạng của hướng tiếp cận. Điều này phản ánh thực tế rằng ở trong nước, hướng nghiên cứu tối ưu hóa chuyển động tay máy robot vẫn đang trong quá trình phát triển và phần lớn mới dừng ở việc giải quyết từng vấn đề riêng lẻ hơn là hình thành các hướng nghiên cứu có tính hệ thống.

#### **1.4. Định hướng nội dung nghiên cứu của đề tài luận án**

Từ những nhận xét trên có thể chỉ ra một số khoảng trống nghiên cứu mà luận án sẽ tập trung như sau:

- Thứ nhất, cần có một cách tiếp cận gắn kết chặt chẽ giữa mô hình động lực học của tay máy công nghiệp với bài toán tối ưu hóa chuyển động, thay vì chỉ dừng ở tối ưu quỹ đạo theo nghĩa hình học hoặc tối ưu số thuần túy.

- Thứ hai, cần khảo sát các trường hợp chuyển động điển hình của tay máy công nghiệp nhằm đánh giá khả năng áp dụng của khung phương pháp nghiên cứu trong những tình huống có ý nghĩa thực tiễn.

Nội dung nghiên cứu của luận án như sau:

- Nghiên cứu cơ sở lý thuyết về phân tích động lực học tay máy công nghiệp và điều khiển tối ưu.
- Xây dựng mô hình động lực học sử dụng phương pháp Lagrange, nguyên lý phù hợp và thiết lập bài toán điều khiển tối ưu cho tay máy công nghiệp sử dụng nguyên lý Pontryagin dựa trên phương pháp gián tiếp.
- Mô phỏng số điều khiển tối ưu tay máy với các chuyển động điển hình: chuyển động điểm-điểm, chuyển động có ràng buộc điểm cuối và chuyển động theo chu kỳ nhằm minh họa phương pháp nghiên cứu.

### **Kết luận chương 1**

Từ nội dung chương 1 có thể rút ra một số kết luận như sau:

1- Cùng với sự phát triển của robot công nghiệp, các yêu cầu về chất lượng chuyển động, độ ổn định, hiệu quả vận hành và mức tiêu hao năng lượng ngày càng trở nên quan trọng, làm cho bài toán tối ưu hóa chuyển động của tay máy robot có ý nghĩa khoa học và thực tiễn rõ rệt. Từ nghiên cứu tổng quan tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước, việc tối ưu hoá chuyển động của robot công nghiệp vẫn đang được các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu.

2- Lý thuyết bài toán phân tích động lực học robot công nghiệp đã có cơ sở hoàn chỉnh với các phương pháp chủ yếu như Newton–Euler, Lagrange, Hamilton và các cách tiếp cận đối với tay máy chịu ràng buộc. Các phương pháp này là nền tảng để mô hình hóa và khảo sát chuyển động của tay máy. Đối với bài toán tối ưu hóa chuyển động và điều khiển tối ưu tay máy robot, hiện nay đã hình thành nhiều hướng tiếp cận chính như quy hoạch động, phương pháp trực tiếp và phương pháp gián tiếp.

3- Luận án xác định nội dung nghiên cứu là sử dụng mô hình động lực học dựa trên phương pháp Lagrange và nguyên lý phù hợp, từ đó thiết lập giải bài toán tối ưu hóa chuyển động của tay máy công nghiệp theo phương pháp gián

tiếp sử dụng nguyên lý Pontryagin, áp dụng cho một số trường hợp chuyển động điển hình nhằm làm rõ quy luật điều khiển tối ưu của hệ.

## CHƯƠNG 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TAY MÁY CÔNG NGHIỆP

Đối với tay máy công nghiệp, nghiên cứu chuyển động cần được xem xét trong mối liên hệ giữa ba nội dung cơ bản: động học, động lực học và điều khiển tối ưu. Động học cho phép mô tả quan hệ giữa các biến khớp với vị trí, vận tốc và gia tốc của điểm tác động cuối. Động lực học làm rõ mối liên hệ giữa trạng thái chuyển động của tay máy với lực và mômen điều khiển tại các khớp. Trên cơ sở đó, điều khiển tối ưu cho phép xác định quy luật điều khiển và quy luật chuyển động phù hợp để tay máy thực hiện nhiệm vụ công nghệ, đồng thời thỏa mãn các điều kiện biên, các ràng buộc đặt ra và đạt tiêu chí tối ưu đã lựa chọn. Vì vậy, để giải quyết các bài toán nghiên cứu của luận án, cần xây dựng cơ sở lý thuyết thống nhất cho việc mô hình hóa động học, thiết lập phương trình động lực học và phát biểu bài toán điều khiển tối ưu chuyển động của tay máy công nghiệp.

Trong luận án này, tay máy robot được xét chủ yếu là tay máy dạng chuỗi hở, với các mô hình tay máy phẳng được sử dụng để minh họa và khảo sát trong các chương tiếp theo. Với phạm vi đó, việc lựa chọn và kết hợp các phương pháp mô hình hóa, phân tích động lực học và điều khiển tối ưu có ý nghĩa quan trọng. Phương pháp ma trận truyền được sử dụng để mô tả hình học và thiết lập các quan hệ động học của tay máy. Phương trình Lagrange dạng ma trận được dùng để xây dựng mô hình động lực học của hệ theo dạng có cấu trúc. Đối với các bài toán có ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, nguyên lý phù hợp được sử dụng nhằm xử lý ràng buộc hình học/quỹ đạo và thiết lập phương trình chuyển động tương ứng. Trên cơ sở mô hình động lực học, bài toán tối ưu hóa chuyển động được phát biểu dưới dạng bài toán điều khiển tối ưu, trong đó nguyên lý cực đại Pontryagin được sử dụng để thiết lập các điều kiện cần của nghiệm tối ưu.

Mục tiêu của chương này là hệ thống hóa cơ sở lý thuyết phục vụ phân tích động lực học và điều khiển tối ưu chuyển động của tay máy công nghiệp. Nội dung chương bao gồm: cơ sở động học tay máy, cơ sở động lực học tay máy, cơ sở điều khiển tối ưu dựa trên nguyên lý cực đại Pontryagin, một số quy

luật chuyển động trong không gian khớp phục vụ so sánh định lượng và khung phương pháp đề xuất của luận án. Các nội dung này là cơ sở để thiết lập và giải các bài toán điều khiển tối ưu chuyển động điểm–điểm, chuyển động khứ hồi và chuyển động có ràng buộc quỹ đạo điểm cuối trong các chương tiếp theo.

## 2.1. Cơ sở lý thuyết về động học tay máy

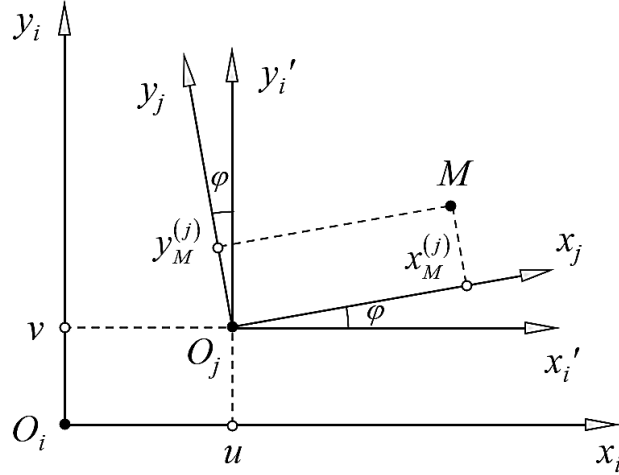
Đối với tay máy công nghiệp dạng chuỗi hở, chuyển động của hệ được hình thành từ chuyển động tương đối giữa các khâu nối tiếp nhau qua các khớp. Mỗi khâu có thể xem là một vật rắn, còn mỗi khớp cho phép thực hiện một dạng chuyển động cơ bản, thường là quay hoặc tịnh tiến. Khi các khớp chuyển động đồng thời, vị trí và hướng của khâu cuối sẽ thay đổi theo một quy luật xác định bởi cấu trúc hình học của tay máy. Vì vậy, khảo sát động học tay máy thực chất là xây dựng các quan hệ toán học mô tả sự phụ thuộc giữa biến khớp và các đại lượng hình học đặc trưng của tay máy.

Để mô tả vị trí và hướng của các khâu một cách có hệ thống, cần gắn các hệ tọa độ thích hợp lên tay máy. Thông thường, một hệ tọa độ cơ sở được gắn với giá cố định của tay máy, và mỗi khâu được gắn một hệ tọa độ cục bộ. Vị trí của một điểm bất kỳ trên khâu có thể được biểu diễn trong hệ tọa độ cục bộ của khâu đó, sau đó chuyển sang hệ tọa độ cơ sở thông qua các phép biến đổi hình học. Trong luận án này, phương pháp ma trận truyền được lựa chọn làm công cụ chủ yếu để mô tả động học tay máy. Phương pháp này dựa trên việc xác định các phép biến đổi hình học giữa các hệ tọa độ cục bộ gắn với từng khâu và hệ tọa độ cố định. Mỗi phép biến đổi có thể được biểu diễn như tổ hợp của các phép quay và tịnh tiến, từ đó cho phép thiết lập một cách có hệ thống vị trí của mọi điểm trên tay máy trong hệ tọa độ cơ sở. So với cách lập luận hình học trực tiếp, phương pháp ma trận truyền có ưu điểm ở tính chặt chẽ, dễ tổng quát hóa và thuận lợi cho việc lập trình tính toán trên các phần mềm mô phỏng số.

### 2.1.1. Phương pháp ma trận truyền

Trong mặt phẳng, xét hai hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  và  $O_j x_j y_j$ , với vị trí hệ tọa độ  $O_j x_j y_j$  được xác định đối với hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  nhờ vị trí của gốc tọa độ  $O_j$  có

tọa độ đối với hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  là  $\mathbf{r}_{O_j}^{(i)} = [x_{O_j}^{(i)} \quad y_{O_j}^{(i)}]^T = [u \quad v]^T$  và góc  $\varphi$  là góc giữa trục  $O_j x_j$  và trục  $O_j x_i' // O_i x_i$ , như trên **Hình 2.1**.



Hình 2.1. Biểu diễn các hệ tọa độ và vị trí điểm  $M$

Xét điểm  $M$  có vị trí trong hệ tọa độ  $O_j x_j y_j$  là  $\mathbf{r}_M^{(j)} = [x_M^{(j)} \quad y_M^{(j)}]^T$ , khi đó vị trí của nó trong hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  là

$$\begin{aligned} x_M^{(i)} &= u + x_M^{(j)} \cos \varphi - y_M^{(j)} \sin \varphi \\ y_M^{(i)} &= v + x_M^{(j)} \sin \varphi + y_M^{(j)} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sử dụng tọa độ thuần nhất trong mặt phẳng, vectơ vị trí của điểm  $M$  được viết dưới dạng

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Trong dạng ma trận, biểu thức (2.1) có thể được viết lại như sau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Đặt các ma trận biến đổi

$$\mathbf{t}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{t}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ta viết lại biểu thức (2.3) dưới dạng

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_u \mathbf{t}_v \mathbf{t}_\varphi \begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Biểu thức (2.5) cho phép xác định vị trí của điểm  $M$  trong hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  được biến đổi từ hệ tọa độ  $O_j x_j y_j$  nhờ hai phép tịnh tiến và một phép quay tương ứng với các ma trận  $\mathbf{t}_u, \mathbf{t}_v, \mathbf{t}_\varphi$  tương ứng.

Đưa vào ma trận biểu diễn phép biến đổi của hệ tọa độ  $O_j x_j y_j$  về hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  như sau:

$$\mathbf{T}_j^i = \mathbf{t}_u \mathbf{t}_v \mathbf{t}_\varphi \quad (2.6)$$

Ma trận  $\mathbf{T}_j^i$  còn được gọi là ma trận truyền từ hệ tọa độ  $O_j x_j y_j$  sang hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$ . Ý nghĩa của ma trận này là gộp đồng thời phép quay và phép tịnh tiến vào trong một biểu thức ma trận duy nhất. Vì vậy, nếu tay máy gồm nhiều khâu nối tiếp, ta chỉ cần nhân liên tiếp các ma trận truyền thành phần để xác định vị trí của bất kỳ khâu nào hoặc của điểm tác động cuối trong hệ tọa độ cơ sở.

### 2.1.2. Áp dụng phương pháp ma trận truyền cho tay máy

Xét tay máy phẳng với hệ tọa độ cố định  $O_0 x_0 y_0$ , hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  gắn liền với khâu  $i$ . Khi đó, ma trận biểu diễn phép biến đổi của hệ tọa độ  $O_i x_i y_i$  về hệ tọa độ cố định  $O_0 x_0 y_0$  sẽ là:

$$\mathbf{T}_i^0 = \mathbf{T}_1^0 \mathbf{T}_2^1 \mathbf{T}_3^2 \dots \mathbf{T}_i^{i-1} \quad (2.7)$$

Khi đó, nếu một điểm  $M$  có tọa độ trong hệ tọa độ khâu  $i$  là  $\mathbf{r}_M^{(i)} = \begin{bmatrix} x_M^{(i)} & y_M^{(i)} \end{bmatrix}^T$ , thì tọa độ của điểm đó trong hệ cố định được xác định bởi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i^0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_M^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Tọa độ điểm tác động cuối  $E$  trong hệ tọa độ cố định  $O_0x_0y_0$  sẽ được xác định tọa độ của nó trong hệ tọa độ gắn liền với khâu thứ  $n$  (khâu cuối) là  $O_nx_ny_n$  thông qua biểu thức tọa độ thuần nhất là:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_n^0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(n)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Như vậy, sau khi xác định được cấu trúc các ma trận truyền thành phần theo từng khớp và từng khâu, ta có thể xác định được vị trí của mọi điểm đặc trưng trên tay máy, đặc biệt là vị trí của điểm tác động cuối, dưới dạng hàm của các tọa độ suy rộng.

Vận tốc và gia tốc của điểm  $E$  trong hệ tọa độ cố định  $O_0x_0y_0$  xác định bằng cách đạo hàm hai vế của biểu thức (2.9) theo thời gian:

$$\mathbf{v}_E^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_E^{(0)} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a}_E^{(0)} = \ddot{\mathbf{r}}_E^{(0)} \quad (2.11)$$

Với từng mô hình tay máy, ta sẽ xác định các ma trận truyền  $\mathbf{T}_1^0, \mathbf{T}_2^1, \dots$  và tính được ma trận  $\mathbf{T}_n^0$ . Sau đó, sử dụng biểu thức (2.9), (2.10), (2.11) để xác định được vị trí, vận tốc, gia tốc của điểm tác động cuối phụ thuộc vào các tọa độ suy rộng.

Đối với từng mô hình tay máy cụ thể, cấu trúc của ma trận truyền phụ thuộc vào loại khớp. Với khớp quay, phần tử biến đổi chủ yếu là góc quay; với khớp tịnh tiến, phần tử biến đổi chủ yếu là độ dịch chuyển. Tuy nhiên, về bản chất, toàn bộ chuỗi động học vẫn được mô tả thống nhất thông qua phép nhân ma trận. Chính đặc điểm này tạo ra ưu thế lớn khi cần thiết lập mô hình cho các tay máy có cấu trúc hỗn hợp. Mặt khác, trong các bài toán chuyển động có ràng buộc quỹ đạo, chẳng hạn khi điểm cuối buộc phải di chuyển trên một đường xác định trước, mô hình động học vi phân giữ vai trò đặc biệt quan trọng. Lúc này, các điều kiện ràng buộc không chỉ áp đặt lên vị trí mà còn kéo theo các

quan hệ đối với vận tốc và gia tốc. Việc xây dựng chính xác các biểu thức vận tốc và gia tốc từ mô hình động học là điều kiện cần để chuyển sang bước thiết lập phương trình động lực học của hệ chịu ràng buộc.

## 2.2. Cơ sở lý thuyết về động lực học tay máy robot

Từ các quan hệ động học đã thiết lập ở mục trước, có thể xác định được vị trí, vận tốc và gia tốc của các khâu cũng như của điểm tác động cuối theo các tọa độ suy rộng. Tuy nhiên, để làm rõ bản chất cơ học của chuyển động, cần tiếp tục xây dựng mối liên hệ giữa các đại lượng động học đó với các lực và mômen tác dụng. Nói cách khác, nếu phần động học cho biết tay máy chuyển động như thế nào, thì phần động lực học sẽ cho biết để tạo ra chuyển động đó cần những tác động cơ học nào tại các khớp. Đối với tay máy công nghiệp dạng chuỗi hở, đây là cơ sở trực tiếp để mô phỏng chuyển động và phát triển các bài toán điều khiển tối ưu.

Trong luận án này, phương trình chuyển động của tay máy robot được thiết lập theo phương pháp Lagrange loại 2. So với cách thiết lập phương trình động lực học bằng cách tách riêng từng khâu và xét cân bằng lực, mômen trên từng phần tử, phương pháp Lagrange cho phép xây dựng phương trình chuyển động trực tiếp theo các tọa độ suy rộng của hệ. Cách tiếp cận này đặc biệt phù hợp với tay máy robot nhiều bậc tự do, vì nó tạo ra một khuôn khổ biểu diễn gọn, có tính hệ thống và thuận lợi khi chuyển sang dạng ma trận.

### 2.2.1. Phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận

Nếu các tọa độ suy rộng của tay máy là độc lập, tức là giữa chúng không tồn tại bất kỳ hệ thức liên hệ nào, thì khi đó ta có các tọa độ suy rộng đủ với số lượng bằng đúng số bậc tự do của tay máy.

Phương trình Lagrange loại 2 của tay máy với  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$  là các tọa độ suy rộng đủ có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial P}{\partial q_i} + Q_i^{kt} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

Trong đó  $T$  là biểu thức động năng của hệ,  $P$  là hàm thế năng và  $Q_i^{kt}$  là lực suy rộng của các lực không thế.

Phương trình động lực học của tay máy có dạng ma trận như sau [1]:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{qt} \quad (2.13)$$

trong đó:

$\mathbf{A}$ : là ma trận quán tính hay ma trận khối lượng suy rộng, cỡ  $(n \times n)$ , đối xứng, không suy biến;

$\mathbf{Q}$ : là ma trận cỡ  $(n \times 1)$  chứa thành phần lực suy rộng của các lực hoạt động, bao gồm các lực điều khiển, lực có thể tính từ hàm thế năng, lực cản;

$\mathbf{Q}_{qt}$ : là ma trận cỡ  $(n \times 1)$  chứa thành phần lực suy rộng của lực quán tính.

Ma trận quán tính được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{ij}]_{i,j=1..n} \\ a_{ij} &= \sum_{k=j \geq 1}^n m_k \mathbf{r}_k^T \mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_{k-1}^T \dots \mathbf{t}_{j1}^T \dots \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2^T \dots \mathbf{t}_{i1}^T \dots \mathbf{t}_k \mathbf{r}_k + J_{ij} \\ J_{ii} &= \sum_{k=i}^n p_{ik} J_k ; J_{ij} = \sum_{k=j>i}^n p_{ik} p_{jk} J_k ; a_{ij} = a_{ji} \end{aligned} \quad (2.14)$$

với:  $\mathbf{r}_k = [\mathbf{r}_{Ck}^{(k)} \quad 1]^T$  ứng với tọa độ khối tâm  $C_k$  của khâu thứ  $k$  trong hệ tọa độ gắn liền với khâu;

$\mathbf{t}_k = \mathbf{T}_k^{k-1}$  là ma trận biểu diễn phép biến đổi của hệ tọa độ gắn liền với khâu  $k$  về hệ tọa độ gắn liền với khâu  $(k-1)$ ;

$\mathbf{t}_{i1}$  là ma trận có các thành phần tương ứng là đạo hàm từ các thành phần

của ma trận  $\mathbf{t}_i$  theo biến  $q_i$  hay  $\mathbf{t}_{i1} = \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial q_i}$ ;

$m_k$  là khối lượng của khâu thứ  $k$ ;

$J_k$  là mômen quán tính của khâu thứ  $k$  đối với khối tâm khâu thứ  $k$ ;

$p_{ik} = 1$  nếu tốc độ góc khâu  $k$  phụ thuộc vào  $\dot{q}_i$  và ngược lại.

Lực suy rộng của các lực hoạt động  $\mathbf{Q}$  bao gồm các lực điều khiển  $\mathbf{u} = [u_i]_{i=1..n}$ , lực cản  $\mathbf{F}_c$  và lực có thể tính từ hàm thế năng  $\Pi$  :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u} - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{F}_c = \mathbf{u} - \mathbf{G} + \mathbf{F}_c ; \mathbf{G} = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (2.15)$$

Xây dựng các ma trận sau từ ma trận quán tính và vector vận tốc suy rộng:

$$\partial_i \mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{14}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{24}}{\partial q_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{n2}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{n3}}{\partial q_i} & \frac{\partial a_{n4}}{\partial q_i} \end{bmatrix} ; \dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_i \\ \dot{q}_2 \dot{q}_i \\ \dots \\ \dot{q}_n \dot{q}_i \end{bmatrix} ; i = \overline{1..n} \quad (2.16)$$

Lực suy rộng của các lực quán tính  $\mathbf{Q}_{qt}$  được tính với hai thành phần:

$$\mathbf{Q}_{qt} = \mathbf{Q}_{qt1} - \mathbf{Q}_{qt2} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{Q}_{qt1} = [Q_{qt1i}]_{n \times 1} ; Q_{qt1i} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \partial_i \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{Q}_{qt2} = \sum_{i=1}^n \partial_i \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i$$

Từ các biểu thức (2.14), (2.15), (2.17), thay vào phương trình (2.13) ta thiết lập được phương trình động lực học trong tọa độ suy rộng đủ.

### 2.2.2. Phương trình chuyển động của tay máy chịu ràng buộc

Trong nhiều bài toán công nghệ, tay máy robot không chuyển động hoàn toàn tự do trong không gian làm việc mà phải thỏa mãn thêm những điều kiện hình học hoặc động học nhất định. Chẳng hạn, điểm tác động cuối có thể phải đi tới một điểm đích xác định, chuyển động dọc theo một quỹ đạo cho trước, hoặc thực hiện một quy luật chuyển động bị ràng buộc bởi yêu cầu công nghệ. Khi đó, ngoài các liên kết vốn có do cấu trúc khớp của tay máy tạo nên, cơ hệ còn chịu thêm các liên kết bổ sung. Vì vậy, phương trình chuyển động của hệ

không thể chỉ sử dụng trực tiếp dạng phương trình của tay máy không ràng buộc, mà cần được thiết lập lại trong khuôn khổ cơ học của hệ chịu liên kết.

Trong dạng ma trận, biểu thức (1.16) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathbf{D}\mathbf{Q}^* = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

với ma trận  $\mathbf{D} = [d_{\sigma j}]$  cỡ  $(n-r) \times n$  và vector  $\mathbf{Q}^* = [Q_1^* \quad Q_2^* \quad \dots \quad Q_n^*]^T$ .

Lúc này, phương trình chuyển động dạng ma trận được thiết lập từ phương trình (1.13) như sau [1]

$$\mathbf{D}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{qt}) \quad (2.19)$$

Hệ phương trình (2.19) cùng với (1.12) tạo thành một hệ phương trình vi phân đại số, nhưng chỉ còn  $n$  tọa độ suy rộng.

Đối với tay máy robot chịu ràng buộc, phương trình chuyển động không còn giữ nguyên dạng của hệ tự do mà phải kể đến ảnh hưởng của phản lực liên kết. Khi đó, thay vì giữ phản lực liên kết như các ẩn phụ, phương trình chuyển động được xây dựng theo nguyên lý phù hợp, thông qua việc chiếu phương trình động lực học lên không gian chuyển động phù hợp. Cách tiếp cận này tạo ra một dạng phương trình động lực học thích hợp cho các bài toán tay máy robot có ràng buộc quỹ đạo, đồng thời là cơ sở trực tiếp để phát triển mô hình điều khiển tối ưu.

## 2.3. Cơ sở lý thuyết về điều khiển tối ưu tay máy

### 2.3.1. Bài toán điều khiển tối ưu của tay máy

Sau khi đã thiết lập được phương trình động lực học của tay máy robot, cả trong trường hợp không ràng buộc và trường hợp chịu ràng buộc, bước tiếp theo là xây dựng bài toán điều khiển tối ưu. Nếu mô hình động lực học cho biết mối liên hệ giữa chuyển động của tay máy với các lực và mômen tác dụng tại các khớp, thì bài toán điều khiển tối ưu đặt ra yêu cầu ở mức cao hơn, đó là xác định quy luật điều khiển sao cho tay máy không chỉ thực hiện được chuyển động mong muốn mà còn đạt tốt nhất theo một tiêu chuẩn đã chọn trước. Nói cách khác, đây là bài toán lựa chọn điều khiển trong tập các điều khiển khả dĩ

để hệ vừa thỏa mãn phương trình chuyển động, vừa thỏa mãn các điều kiện đầu, điều kiện cuối và các ràng buộc kèm theo, đồng thời cực tiểu hoặc cực đại một đại lượng đặc trưng cho chất lượng chuyển động.

Xét tay máy robot là một hệ động lực có phương trình vi phân chuyển động dưới dạng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.20)$$

trong đó:

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  là vectơ chứa biến trạng thái (biến pha) tại thời điểm  $t$ ;

$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  là vectơ chứa biến điều khiển tại thời điểm  $t$ ;

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  là hàm liên tục khả vi mô tả hệ thống;

$\mathbf{x}_0$  là trạng thái ban đầu đã biết tại thời điểm  $t_0$ .

Đối với tay máy robot, vectơ trạng thái thường được chọn từ các tọa độ suy rộng và vận tốc suy rộng

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Với cách chọn này, hệ phương trình động lực học bậc hai của tay máy sẽ được chuyển về hệ phương trình vi phân cấp một, thuận lợi cho việc phát biểu bài toán tối ưu và áp dụng các công cụ của lý thuyết điều khiển tối ưu.

Một bài toán điều khiển tối ưu luôn gắn với một hàm mục tiêu. Hàm này được dùng để lượng hóa chất lượng của quá trình chuyển động và làm căn cứ để so sánh các phương án điều khiển khác nhau. Tùy theo yêu cầu cụ thể của bài toán, hàm mục tiêu có thể biểu diễn nhiều tiêu chuẩn khác nhau như thời gian chuyển động nhỏ nhất, nỗ lực điều khiển nhỏ nhất, năng lượng tiêu hao nhỏ nhất, độ giật nhỏ nhất hoặc sự kết hợp của nhiều tiêu chuẩn. Trong dạng tổng quát, hàm mục tiêu có thể được viết dưới dạng

$$J = \phi(\mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (2.22)$$

với đó  $\phi$  và  $L$  là hàm phi tuyến của các biến tương ứng,  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$  là trạng thái tại thời điểm cuối  $t_f$ .

Tại thời điểm cuối, trạng thái của hệ có thể phải thỏa mãn một số điều kiện biên, chẳng hạn đi tới một vị trí xác định  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ , đạt một tư thế xác định hoặc dừng lại với vận tốc bằng không. Trong dạng tổng quát, các điều kiện cuối có thể viết dưới dạng

$$\Phi(\mathbf{x}_f) = 0 \quad (2.23)$$

Từ các thành phần trên, có thể phát biểu bài toán điều khiển tối ưu tay máy robot trong dạng tổng quát như sau:

*Xét tay máy robot có phương trình vi phân chuyển động biểu diễn dưới dạng (2.20). Xác định biến các điều khiển  $\mathbf{u}^*(t)$  để hệ chuyển từ trạng thái đầu  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , thỏa mãn các điều kiện cuối (2.23) đồng thời hàm mục tiêu (2.22) đạt giá trị tối ưu.*

### 2.3.2. Nguyên lý cực đại Pontryagin

Để giải bài toán điều khiển tối ưu của tay máy robot, cần một công cụ lý thuyết cho phép xử lý đồng thời ba yếu tố: phương trình động lực học của hệ, các điều kiện biên của chuyển động và hàm mục tiêu cần tối ưu. Trong các hướng tiếp cận của lý thuyết điều khiển tối ưu, nguyên lý cực đại Pontryagin là một công cụ quan trọng và đặc biệt phù hợp đối với các hệ cơ học có mô hình động lực học phi tuyến. Ưu điểm cơ bản của cách tiếp cận này là bài toán tối ưu không được xử lý theo hướng tham số hóa trước quỹ đạo hay tín hiệu điều khiển, mà được thiết lập trực tiếp trên cơ sở mô hình động lực học của hệ. Vì vậy, cấu trúc của điều khiển tối ưu và mối liên hệ giữa điều khiển với chuyển động của hệ được thể hiện rõ ngay trong quá trình xây dựng điều kiện tối ưu.

Để xây dựng các điều kiện cần của bài toán tối ưu, đưa vào một hệ biến phụ gọi là biến liên hợp. Ký hiệu vector biến liên hợp là

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Mỗi biến  $p_i$  gắn với một biến trạng thái tương ứng và có vai trò như một nhân tử phụ phản ánh mức độ ảnh hưởng của trạng thái lên giá trị tối ưu của hàm mục tiêu.

Xây dựng hàm Hamilton kết hợp động lực học của hệ và chi phí như sau

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + p_0 L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.25)$$

với  $p_0 \in \{0, -1\}$ .

Về bản chất, hàm Hamilton là đại lượng trung tâm của nguyên lý Pontryagin. Nó kết hợp trong cùng một biểu thức cả động lực học của hệ lẫn tiêu chuẩn tối ưu, từ đó cho phép chuyển bài toán tối ưu ban đầu thành một hệ điều kiện cần dưới dạng các phương trình vi phân và các điều kiện cực trị.

*Nguyên lý Pontryagin:*

Điều kiện cần để điều khiển tối ưu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$  đưa hệ thống (2.20) từ trạng thái đầu  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , thoả mãn các điều kiện cuối (2.23), theo quỹ đạo tối ưu tương ứng  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ , biến liên hợp tương ứng  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*(t)$  và phiếm hàm mục tiêu (2.22) đạt cực trị theo yêu cầu là:

1. Tồn tại vectơ biến liên hợp mở rộng  $\mathbf{p} = [p_0, \mathbf{p}]^T$  không đồng nhất bằng không, thoả mãn phương trình liên hợp và phương trình trạng thái

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \quad (2.27)$$

2. Hàm Hamilton  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$  đạt cực đại theo  $\mathbf{u}^*$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.28)$$

Điều kiện này tương đương với tại mỗi thời điểm  $t$  thì  $\mathbf{u}^*(t)$  phải là nghiệm của hệ phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t)) = 0 \quad (2.29)$$

Đây là trường hợp riêng khi ta không xét đến các ràng buộc đặt lên biến điều khiển  $\mathbf{u}(t)$ .

3. Tại thời điểm cuối  $t = t_f$  thì điều kiện của biến liên hợp thỏa mãn

$$\mathbf{p}(t_f) = \left[ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_f)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_f)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \boldsymbol{\psi} \quad (2.30)$$

với  $\Phi$  là vectơ ràng buộc điểm cuối dưới dạng (2.23);  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^s$  là vectơ nhân tử ứng với các ràng buộc trạng thái cuối;  $s$  là số điều kiện ràng buộc của trạng thái cuối.

Nếu trạng thái cuối không chịu ràng buộc nào và hàm chi phí không phụ thuộc trạng thái cuối thì  $\mathbf{p}(t_f) = \mathbf{0}$ .

Như vậy, nguyên lý cực đại Pontryagin biến bài toán điều khiển tối ưu ban đầu thành việc giải một hệ gồm: phương trình trạng thái, phương trình biến liên hợp, điều kiện cực trị của Hamilton theo điều khiển và các điều kiện biên tương ứng. Đây thực chất là một bài toán giá trị biên hai điểm, trong đó trạng thái thường được biết tại thời điểm đầu, còn biến liên hợp hoặc một phần trạng thái có thể chịu điều kiện tại thời điểm cuối. So với bài toán động lực học ban đầu vốn chỉ là bài toán giá trị đầu, cấu trúc mới này phức tạp hơn về mặt toán học, nhưng đổi lại nó cho phép mô tả trực tiếp điều kiện cần của lời giải tối ưu.

### 2.3.3. Áp dụng nguyên lý Pontryagin điều khiển tối ưu tay máy

Ý tưởng cơ bản của cách tiếp cận này là xuất phát trực tiếp từ phương trình chuyển động của tay máy, lựa chọn biến trạng thái, biến điều khiển và hàm mục tiêu phù hợp với yêu cầu công nghệ, sau đó xây dựng hàm Hamilton và hệ điều

kiện cần tối ưu. Với cách làm đó, bài toán tối ưu không tách rời bài toán cơ học của tay máy mà được đặt ngay trên nền mô hình động lực học của hệ.

Từ phương trình (2.13), ta có thể xác định được gia tốc suy rộng như sau:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]; \quad \mathbf{N} = -\mathbf{G} + \mathbf{F}_c + \mathbf{Q}_{qt} \quad (2.31)$$

Phương trình (2.31) có thể được viết trong không gian trạng thái:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Trong luận án này, mục tiêu tối ưu được lựa chọn chủ yếu theo hướng giảm nỗ lực điều khiển, qua đó hướng tới giảm năng lượng tiêu hao trong quá trình chuyển động của tay máy. Vì vậy, hàm mục tiêu thường được chọn ở dạng tích phân theo thời gian dưới dạng tổng quát có thể viết là

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min \quad (2.33)$$

trong đó  $f_0$  là hàm phụ thuộc vào biến trạng thái, biến điều khiển; điều kiện cuối được xem là điều kiện biên bắt buộc cần thỏa mãn, còn tiêu chuẩn tối ưu chủ yếu được đặt trên quá trình điều khiển.

Hàm Hamilton (2.25) được viết lại dưới dạng

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \end{bmatrix} + p_0 f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.34)$$

Nếu tách vector liên hợp thành hai phần tương ứng với hai nhóm biến trạng thái  $\mathbf{q}$  và  $\dot{\mathbf{q}}$ , tức là

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_q \\ \mathbf{p}_{\dot{q}} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

thì hàm Hamilton có thể viết lại thành

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}_q^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{\dot{q}}^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] - f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.36)$$

Cách viết này cho thấy rõ vai trò của từng nhóm biến trạng thái trong cấu trúc của Hamilton.

*Lộ trình điều khiển tối ưu theo nguyên lý Pontryagin:*

1. Xác định các thành phần của bài toán tối ưu:

- Hệ động lực, như biểu thức (2.20);
- Hàm mục tiêu, như biểu thức (2.22);
- Ràng buộc trạng thái (nếu có) tại thời điểm đầu/cuối.

2. Xây dựng hàm Hamilton

- Hàm Hamilton tổng hợp các thành phần động lực và mục tiêu tối ưu, như biểu thức (2.25);

- Với bài toán tối thiểu hóa hàm chi phí, ta chọn  $p_0 = -1$ .

3. Thiết lập hệ phương trình của biến trạng thái và biến liên hợp

- Hệ phương trình trạng thái, như biểu thức (2.27);
- Hệ phương trình liên hợp, như biểu thức (2.26).

4. Xác định các biến điều khiển tối ưu

- Biến điều khiển tối ưu  $\mathbf{u}^*(t)$  rút ra từ nghiệm của phương trình (2.29).

5. Xác định biến trạng thái, biến liên hợp ứng với điều khiển tối ưu

- Thay biến điều khiển  $\mathbf{u}^*(t)$  và giải hệ phương trình hai điểm biên: phương trình biến trạng thái, phương trình biến liên hợp, điều kiện biên.

Như vậy, việc áp dụng nguyên lý Pontryagin cho bài toán điều khiển tối ưu tay máy robot dẫn tới một hệ gồm: phương trình trạng thái, phương trình liên hợp, điều kiện cực trị và các điều kiện biên. Đây là một bài toán giá trị biên hai điểm. Ở đó, trạng thái ban đầu của tay máy thường được biết tại thời điểm  $t_0 = 0$ , còn trạng thái cuối phải thỏa mãn các yêu cầu công nghệ tại thời điểm  $t = t_f$ . Đồng thời, các biến liên hợp thường chịu các điều kiện biên tương ứng ở thời điểm cuối. Bản chất của việc giải bài toán tối ưu lúc này là tìm đồng thời các hàm trạng thái, biến liên hợp và điều khiển sao cho toàn bộ hệ điều kiện đó được thỏa mãn.

## 2.4. Cơ sở lý thuyết một số quy luật chuyển động phục vụ so sánh định lượng

Để đánh giá định lượng hiệu quả của nghiệm điều khiển tối ưu thu được theo nguyên lý cực đại Pontryagin, luận án sử dụng một số quy luật chuyển động điển hình làm phương án đối chứng. Đối với bài toán chuyển động điểm-điểm trong không gian khớp, các quy luật này được xây dựng trực tiếp cho từng biến khớp trên cơ sở các điều kiện biên về vị trí, vận tốc và trong một số trường hợp cả gia tốc tại thời điểm đầu và thời điểm cuối chuyển động. Với mỗi quy luật chuyển động, các hàm tọa độ khớp, vận tốc khớp và gia tốc khớp được xác định trước, sau đó thay vào phương trình động lực học của tay máy để tính lực/mômen điều khiển tương ứng và giá trị hàm mục tiêu  $J$ .

Đối với bài toán chuyển động có ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, các quy luật chuyển động đối chứng không được áp dụng độc lập cho tất cả các biến khớp vì có thể vi phạm ràng buộc hình học của điểm tác động cuối. Trong trường hợp này, quy luật đối chứng được xây dựng thông qua tham số chuyển động dọc theo quỹ đạo điểm cuối. Sau khi xác định được quy luật chuyển động thỏa mãn ràng buộc, các đại lượng động học tương ứng được đưa vào mô hình động lực học để tính lực/mômen điều khiển và hàm mục tiêu  $J$ .

Trên cơ sở đó, kết quả điều khiển tối ưu được so sánh với các quy luật chuyển động đối chứng theo cùng một tiêu chí đánh giá. Việc so sánh này không nhằm thay thế bài toán điều khiển tối ưu, mà nhằm cung cấp cơ sở định lượng để đánh giá mức độ cải thiện của nghiệm tối ưu về lực/mômen điều khiển và tiêu chí tối ưu nỗ lực điều khiển trong các bài toán khảo sát.

### 2.4.1. Quy luật chuyển động đa thức bậc ba

Quy luật chuyển động đa thức bậc ba là một trong những dạng quy luật chuyển động cơ bản thường được sử dụng trong không gian khớp của tay máy. Quy luật này cho phép xác định hàm biến chuyển động theo thời gian trên cơ sở các điều kiện biên về vị trí và vận tốc tại thời điểm đầu và thời điểm cuối của chuyển động.

Xét một biến chuyển động trong khoảng thời gian từ  $t_0$  đến  $t_f$ . Biến này được mô tả bằng đa thức bậc ba theo thời gian:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (2.37)$$

trong đó  $\varphi(t)$  là biến chuyển động và  $a_0, a_1, a_2, a_3$  là các hệ số cần xác định.

Vận tốc và gia tốc tương ứng của biến chuyển động được xác định bởi:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \quad (2.38)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = 2a_2 + 6a_3t \quad (2.39)$$

Các hệ số của đa thức được xác định từ bốn điều kiện biên:

$$c \quad (2.40)$$

trong đó  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$  lần lượt là vị trí và vận tốc của biến chuyển động tại thời điểm ban đầu và  $\varphi_f, \dot{\varphi}_f$  lần lượt là vị trí và vận tốc của biến chuyển động tại thời điểm cuối. Thay điều kiện (2.40) vào các phương trình (2.37) và (2.38) sẽ thu được giá trị các hệ số của đa thức bậc ba.

### 2.4.2. Quy luật chuyển động đa thức bậc năm

Quy luật chuyển động đa thức bậc năm thường được sử dụng khi cần bảo đảm tính liên tục của vị trí, vận tốc và gia tốc tại thời điểm đầu và thời điểm cuối của chuyển động. So với quy luật đa thức bậc ba, quy luật đa thức bậc năm có thêm các điều kiện biên về gia tốc, do đó cho phép tạo ra chuyển động trơn hơn và phù hợp hơn trong các bài toán cần hạn chế sự thay đổi đột ngột của gia tốc.

Xét một biến chuyển động trong khoảng thời gian từ  $t_0$  đến  $t_f$ . Biến này được mô tả bằng đa thức bậc năm theo thời gian:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (2.41)$$

trong đó  $\varphi(t)$  là biến chuyển động và  $a_i, i = \overline{0..5}$  là các hệ số cần xác định.

Vận tốc, gia tốc và đạo hàm bậc ba theo thời gian của biến chuyển động được xác định bởi:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (2.42)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (2.43)$$

$$\dddot{\varphi}(t) = \frac{d^3\varphi(t)}{dt^3} = 6a_3 + 24a_4t + 60a_5t^2 \quad (2.44)$$

Các hệ số của đa thức được xác định từ sáu điều kiện biên:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \varphi_0, & \dot{\varphi}(t_0) &= \dot{\varphi}_0, & \ddot{\varphi}(t_0) &= \ddot{\varphi}_0 \\ \varphi(t_f) &= \varphi_f, & \dot{\varphi}(t_f) &= \dot{\varphi}_f, & \ddot{\varphi}(t_f) &= \ddot{\varphi}_f \end{aligned} \quad (2.45)$$

trong đó  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0$  lần lượt là vị trí, vận tốc, gia tốc của biến chuyển động tại thời điểm ban đầu và  $\varphi_f, \dot{\varphi}_f, \ddot{\varphi}_f$  lần lượt là vị trí, vận tốc, gia tốc của biến chuyển động tại thời điểm cuối. Thay điều kiện (2.45) vào các phương trình (2.41) - (2.43) sẽ thu được giá trị các hệ số của đa thức bậc năm.

### 2.4.3. Quy luật chuyển động S-curve

Quy luật chuyển động S-curve là dạng quy luật chuyển động thường được sử dụng cho tay máy công nghiệp nhằm tạo ra chuyển động êm dịu hơn so với các quy luật có gia tốc thay đổi đột ngột. Đặc điểm chính của quy luật này là vận tốc biến thiên theo dạng chữ S, trong khi gia tốc được thay đổi một cách liên tục hơn thông qua việc giới hạn độ giật. Do đó, quy luật S-curve có ý nghĩa trong các bài toán cần hạn chế dao động, giảm xung lực và cải thiện độ trơn của chuyển động.

Xét một biến chuyển động  $\varphi(t)$  trong khoảng thời gian từ  $t_0$  đến  $t_f$ . Độ giật của biến chuyển động được xác định bởi:

$$j(t) = \ddot{\varphi}(t) = \frac{d^3\varphi(t)}{dt^3} \quad (2.46)$$

Trong quy luật S-curve 7 pha, chuyển động được chia thành bảy khoảng thời gian liên tiếp. Trong các pha này, độ giạt nhận các giá trị  $+j_m, 0, -j_m, 0, -j_m, 0, +j_m$ , tương ứng với các giai đoạn tăng gia tốc, giữ gia tốc không đổi, giảm gia tốc, chuyển động với vận tốc không đổi, giảm tốc êm, giữ gia tốc âm không đổi và triệt tiêu gia tốc về không.

Các pha chuyển động có thể được mô tả như sau:

$$j(t) = \begin{cases} +j_m, & 0 \leq t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t < t_2 \\ -j_m, & t_2 \leq t < t_3 \\ 0, & t_3 \leq t < t_4 \\ -j_m, & t_4 \leq t < t_5 \\ 0, & t_5 \leq t < t_6 \\ +j_m, & t_6 \leq t \leq t_7 \end{cases} \quad (2.47)$$

trong đó  $j_m$  là giá trị giới hạn của độ giạt;  $t_1, t_2, \dots, t_7$  là các mốc thời gian phân chia bảy pha của chuyển động. Các giá trị vận tốc, gia tốc và vị trí của biến chuyển động được xác định bằng cách tích phân lần lượt độ giạt theo thời gian:

$$\ddot{\varphi}(t) = \ddot{\varphi}(t_i) + \int_{t_i}^t j(\tau) d\tau \quad (2.48)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(t_i) + \int_{t_i}^t \ddot{\varphi}(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

$$\varphi(t) = \varphi(t_i) + \int_{t_i}^t \dot{\varphi}(\tau) d\tau \quad (2.50)$$

với  $t_i \leq t \leq t_{i+1}, i = \overline{0..6}$ .

Như vậy, trong mỗi pha, gia tốc là hàm bậc nhất theo thời gian, vận tốc là hàm bậc hai và vị trí là hàm bậc ba. Các mốc thời gian của bảy pha được lựa chọn sao cho quy luật chuyển động thỏa mãn các điều kiện biên:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \varphi_0, & \dot{\varphi}(t_0) &= 0, & \ddot{\varphi}(t_0) &= 0 \\ \varphi(t_f) &= \varphi_f, & \dot{\varphi}(t_f) &= 0, & \ddot{\varphi}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

#### 2.4.4. Quy trình so sánh các luật chuyển động theo hàm mục tiêu J

Các quy luật chuyển động trình bày ở các mục trên được sử dụng làm phương án đối chứng nhằm đánh giá định lượng hiệu quả của nghiệm điều khiển tối ưu. Việc so sánh được thực hiện trên cùng một mô hình động lực học, cùng điều kiện biên, cùng thời gian chuyển động và cùng tiêu chí tối ưu. Nhờ đó, sự khác biệt về giá trị hàm mục tiêu  $J$  phản ánh ảnh hưởng của quy luật chuyển động đến lực/mômen điều khiển và tiêu chí tối ưu của tay máy.

Đối với bài toán chuyển động điểm–điểm trong không gian khớp, các quy luật chuyển động đối chứng được xây dựng trực tiếp cho từng biến khớp:

$$q_i(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.52)$$

trong đó  $q_i(t)$  là biến khớp thứ  $i$  còn  $\varphi_i(t)$  là quy luật chuyển động được lựa chọn, chẳng hạn đa thức bậc ba, đa thức bậc năm hoặc S-curve. Từ đó xác định được các vectơ:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T \quad (2.53)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t) \quad \dot{q}_2(t) \quad \dots \quad \dot{q}_n(t)]^T \quad (2.54)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = [\ddot{q}_1(t) \quad \ddot{q}_2(t) \quad \dots \quad \ddot{q}_n(t)]^T \quad (2.55)$$

Các đại lượng  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  sau đó được thay vào phương trình động lực học của tay máy để xác định lực hoặc mômen điều khiển tương ứng với từng quy luật chuyển động đối chứng.

Đối với bài toán có ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, các quy luật chuyển động đối chứng không được áp dụng độc lập cho tất cả các biến khớp nếu điều đó làm vi phạm ràng buộc hình học của điểm tác động cuối. Trong trường hợp này, quy luật đối chứng được xây dựng thông qua tham số chuyển động dọc theo quỹ đạo điểm cuối. Xét quỹ đạo điểm cuối được mô tả dưới dạng tham số:

$$x_E = x_E(\varphi), \quad y_E = y_E(\varphi) \quad (2.56)$$

thì có thể xây dựng quy luật chuyển động đối chứng cho tham số  $\varphi = \varphi(t)$  theo quy luật chuyển động như đa thức bậc ba, đa thức bậc năm hoặc S-curve. Cách

xây dựng này bảo đảm rằng điểm tác động cuối luôn nằm trên quỹ đạo hình học cho trước trong suốt quá trình chuyển động. Từ quan hệ động học của tay máy, giải bài toán động học ngược ta rút ra các đại lượng  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , từ đó tính được lực/mômen điều khiển.

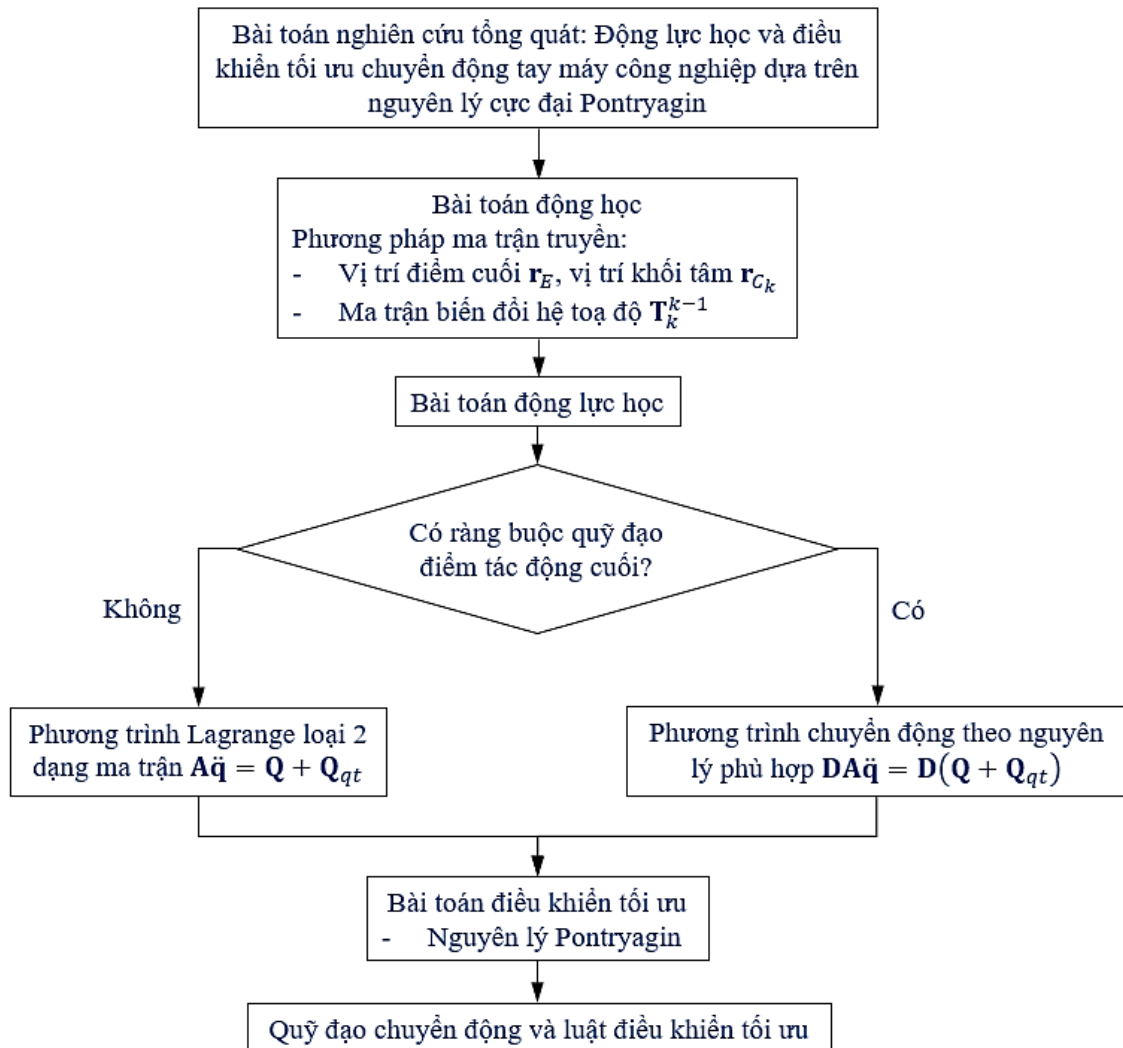
Giá trị hàm mục tiêu của từng quy luật chuyển động được tính theo cùng tiêu chí với bài toán điều khiển tối ưu. Như vậy, quy trình so sánh gồm các bước chính: xác định cùng điều kiện biên và thời gian chuyển động; xây dựng quy luật chuyển động đối chứng phù hợp với từng dạng bài toán; tính các đại lượng động học; xác định lực/mômen điều khiển từ phương trình động lực học; tính hàm mục tiêu  $J$ ; sau đó so sánh với kết quả điều khiển tối ưu. Đối với bài toán ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, việc sử dụng tham số chuyển động dọc theo quỹ đạo giúp bảo đảm các phương án đối chứng đều thỏa mãn cùng ràng buộc hình học, nhờ đó kết quả so sánh có cùng cơ sở đánh giá với nghiệm điều khiển tối ưu.

## 2.5. Khung phương pháp đề xuất của luận án

Trên cơ sở các nội dung đã trình bày ở các mục trước, có thể thấy rằng việc nghiên cứu tay máy công nghiệp theo hướng phân tích động lực học và tối ưu hoá chuyển động đòi hỏi một cách tiếp cận có tính hệ thống, trong đó các lớp vấn đề về động học, động lực học và điều khiển tối ưu không được xem như những phần tách rời, mà phải được tổ chức thành một khung nghiên cứu thống nhất. Đây cũng chính là định hướng được lựa chọn trong luận án này. Theo đó, luận án không dừng ở việc thiết lập mô hình cho một tay máy cụ thể, mà hướng tới xây dựng một khung lý thuyết và phương pháp có thể sử dụng để nghiên cứu bài toán phân tích động lực học và tối ưu hoá chuyển động tay máy công nghiệp nói chung.

Xem tay máy công nghiệp như một cơ hệ nhiều vật dạng chuỗi hở, trong đó các khâu được nối với nhau bởi các khớp động và chuyển động của toàn hệ được mô tả thông qua các tọa độ suy rộng. Trên cơ sở đó, phương pháp ma trận truyền được sử dụng để thiết lập các quan hệ động học của tay máy. Kết quả cần đạt được ở bước này là xác định được vị trí của điểm tác động cuối, vị trí

của các khối tâm khâu, đồng thời xây dựng được các ma trận biến đổi hệ tọa độ giữa các khâu và hệ tọa độ cơ sở.



Hình 2.2. Khung phương pháp đề xuất của luận án

Phương trình chuyển động được xây dựng theo phương pháp Lagrange loại 2 dạng ma trận. Cách tiếp cận này cho phép biểu diễn mô hình động lực học của tay máy dưới dạng gọn, rõ về cấu trúc và thuận lợi cho việc xử lý các bài toán nhiều bậc tự do. Đối với các trường hợp tay máy chuyển động không ràng buộc, phương trình động lực học được thiết lập trực tiếp trong không gian các tọa độ suy rộng. Đối với các trường hợp tay máy chịu ràng buộc, đặc biệt là ràng buộc quỹ đạo của điểm tác động cuối, mô hình được phát triển tiếp theo hướng sử dụng nguyên lý phù hợp để đưa phương trình chuyển động về dạng chỉ còn chứa các biến độc lập.

Đối với bài toán điều khiển tối ưu, các lực hoặc mômen dẫn động tại khớp được xem là các biến điều khiển, còn chuyển động của tay máy được mô tả trong không gian trạng thái. Tùy theo yêu cầu công nghệ của từng bài toán, hàm mục tiêu được lựa chọn theo hướng giảm nỗ lực điều khiển, qua đó hướng tới giảm năng lượng tiêu hao của tay máy trong quá trình làm việc. Từ hệ phương trình trạng thái và hàm mục tiêu đã xác định, nguyên lý cực đại Pontryagin được sử dụng để xây dựng hàm Hamilton, hệ phương trình trạng thái, hệ phương trình biến liên hợp và điều kiện cực trị của bài toán tối ưu. Kết quả cuối cùng là một bài toán giá trị biên hai điểm, làm cơ sở để xác định quy luật điều khiển tối ưu.

Trình tự ở khung nghiên cứu cho thấy mỗi bước đều được xây dựng trên kết quả của bước trước đó. Quan hệ động học là cơ sở để xác định các đại lượng năng lượng. Các đại lượng năng lượng là cơ sở để thiết lập phương trình động lực học. Phương trình động lực học là ràng buộc vi phân của bài toán điều khiển tối ưu. Cuối cùng, nguyên lý Pontryagin là công cụ để chuyển bài toán tối ưu ban đầu về một hệ điều kiện cần có thể giải được bằng phương pháp số. Chính sự liên kết liên tục đó tạo nên tính thống nhất của khung nghiên cứu.

Một điểm cần nhấn mạnh là khung nghiên cứu nêu trên được xây dựng cho bài toán phân tích động lực học và tối ưu hoá chuyển động tay máy công nghiệp ở mức tổng quát, chứ không phải cho riêng một cấu hình tay máy cụ thể. Điều đó có nghĩa là các nội dung như phương pháp ma trận truyền, phương trình Lagrange dạng ma trận, phương trình chuyển động của hệ chịu ràng buộc và nguyên lý Pontryagin được luận án lựa chọn không phải vì chúng chỉ phù hợp với một mô hình tay máy riêng lẻ, mà vì chúng cho phép hình thành một tuyến nghiên cứu tương đối thống nhất đối với lớp bài toán đang xét.

Việc so sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng được thực hiện sau khi thu được nghiệm điều khiển tối ưu. Nội dung này không phải là bước cấu thành bài toán điều khiển tối ưu, mà là bước đánh giá nhằm kiểm chứng và làm rõ hiệu quả của nghiệm tối ưu theo cùng hàm mục tiêu  $J$ . Đối với bài toán chuyển động điểm–điểm, các quy luật đối chứng được xây dựng

trong không gian khớp; đối với bài toán có ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, quy luật đối chứng được xây dựng thông qua tham số chuyển động dọc theo quỹ đạo điểm cuối để bảo đảm cùng thỏa mãn ràng buộc hình học.

## **Kết luận chương 2**

Từ nội dung chương 2 có thể rút ra một số kết luận như sau:

1- Bài toán phân tích động lực học và tối ưu hoá chuyển động tay máy công nghiệp có thể được đặt trên một cơ sở lý thuyết thống nhất, trong đó động học là nền tảng để xây dựng các đại lượng cơ học, động lực học là cơ sở để mô tả bản chất chuyển động của hệ, còn điều khiển tối ưu là công cụ để lựa chọn quy luật điều khiển phù hợp theo tiêu chuẩn đã chọn. Sự liên kết này cho thấy ba lớp nội dung trên không tách rời nhau mà tạo thành một chuỗi logic nghiên cứu hoàn chỉnh.

2- Việc lựa chọn phương pháp ma trận truyền, phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận kết hợp nguyên lý phù hợp và nguyên lý Pontryagin là phù hợp với định hướng nghiên cứu của luận án. Tổ hợp các công cụ này cho phép vừa mô tả được cấu trúc cơ học của tay máy robot, vừa thiết lập được phương trình chuyển động trong dạng thuận lợi, đồng thời tạo cơ sở lý thuyết để đưa bài toán tối ưu hoá chuyển động về bài toán giá trị biên hai điểm.

3- Xây dựng được khung nghiên cứu tổng quát của luận án đối với lớp bài toán phân tích động lực học và tối ưu hoá chuyển động tay máy công nghiệp. Trong đó, bài toán động học là điểm xuất phát, bài toán động lực học là bước trung gian mang tính cơ sở, còn bài toán điều khiển tối ưu là bước phát triển để xác định quỹ đạo chuyển động và luật điều khiển tối ưu. Bên cạnh đó, một số quy luật chuyển động điển hình như đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve đã được trình bày làm cơ sở xây dựng các phương án đối chứng phục vụ đánh giá định lượng, qua đó làm rõ hiệu quả của nghiệm điều khiển tối ưu theo cùng hàm mục tiêu đã lựa chọn.

### CHƯƠNG 3. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TAY MÁY CÔNG NGHIỆP TRONG CHUYỂN ĐỘNG ĐIỂM-ĐIỂM

Chuyển động điểm-điểm là một dạng chuyển động cơ bản và có ý nghĩa thực tiễn rõ rệt trong ứng dụng tay máy công nghiệp. Trong nhiều nhiệm vụ như gấp đặt, vận chuyển, bốc xếp hoặc cấp phôi, tay máy thường được yêu cầu di chuyển từ trạng thái đầu đến trạng thái cuối xác định. Khác với bài toán bám quỹ đạo, ở đây quỹ đạo trung gian của điểm tác động cuối không được quy định trước một cách tường minh, mà cần được xác định cùng với quy luật điều khiển sao cho hệ vừa thoả mãn các điều kiện biên, vừa đạt được tiêu chuẩn tối ưu đã lựa chọn.

Trong chương này, bài toán điều khiển tối ưu chuyển động điểm-điểm được khảo sát theo hai hướng cụ thể. Trước hết là bài toán điều khiển tối ưu tay máy đến điểm đích, trong đó tay máy chuyển động từ trạng thái ban đầu đến một điểm cuối xác định. Tiếp theo là bài toán điều khiển tối ưu tay máy theo chu trình, trong đó chuyển động điểm-điểm được xét trong một chu trình làm việc gồm giai đoạn đi và giai đoạn về. Hai trường hợp này được lựa chọn như các bài toán minh hoạ điển hình nhằm làm rõ khả năng áp dụng của khung phương pháp nghiên cứu đối với chuyển động điểm-điểm của tay máy công nghiệp.

#### 3.1. Điều khiển tối ưu tay máy chuyển động đến điểm đích

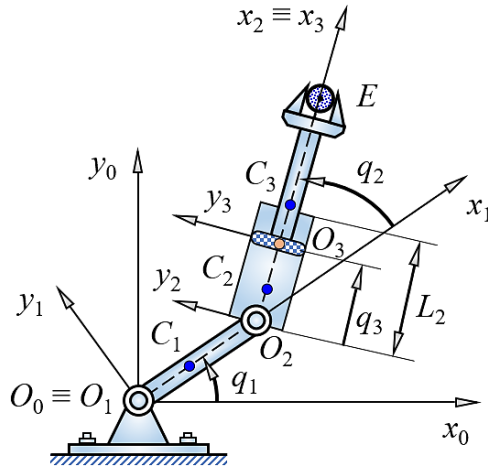
##### 3.1.1. Đặt bài toán

Xét tay máy phẳng với hai khâu quay và một khâu tịnh tiến ở cuối (tay máy phẳng RRP), như trong *Hình 3.1*.

Tay máy này được mô hình hoá như sau:

- Các khâu của tay máy là các thanh mảnh đồng chất, chiều dài  $L_1 = O_1O_2$ ;  $L_2$ ;  $L_3 = O_3E$  với  $E$  là điểm tác động cuối;
- Khối lượng khâu thứ  $i$  của tay máy là  $m_i$  với  $i = 1, 2, 3$ ;
- Khối tâm khâu thứ  $i$  là  $C_i$  tại các vị trí  $O_1C_1 = c_1$ ;  $O_2C_2 = c_2$ ;  $O_3C_3 = c_3$ ;

- Mômen quán tính khâu thứ  $i$  đối với khối tâm  $C_i$  là  $J_i$  với  $i = 1, 2, 3$ ;



Hình 3.1. Tay máy phẳng RRP

- Vectơ tọa độ suy rộng của tay máy được chọn là  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$  ứng với các góc quay tại các khớp 1, khớp 2 và độ dịch chuyển khớp 3;
- Tay máy di chuyển một tải trọng khối lượng  $m$  ở điểm tác động cuối  $E$  coi như là một chất điểm tại đầu mút của khâu 3.

Các lực hoặc mômen dẫn động tại các khớp được chọn làm biến điều khiển của hệ. Ký hiệu vectơ điều khiển là

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Bài toán đặt ra là giảm nỗ lực điều khiển, hay tối ưu nỗ lực điều khiển của tay máy thông qua xác định các lực/mômen dẫn động tối ưu tại các khớp (biến điều khiển  $\mathbf{u}$ ) để điểm tác động cuối  $E$  di chuyển từ điểm đầu  $(x_0, y_0)$  ứng với cấu hình tay máy robot là  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  đến điểm cuối  $(x_f, y_f)$  ứng với cấu hình tay máy robot là  $\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f$  trong thời gian  $t_f$  cho trước.

### 3.1.2. Thiết lập phương trình động lực học

Đặt các hệ tọa độ như trên *Hình 3.1*, các ma trận truyền biểu diễn phép biến đổi giữa các hệ tọa độ tính được như sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 = \mathbf{T}_1^0 &= \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{t}_2 = \mathbf{T}_2^1 &= \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & L_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{t}_3 = \mathbf{T}_3^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tọa độ khối tâm các khâu trong hệ tọa độ gắn liền khâu là:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_1}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_2}^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_3}^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tọa độ điểm cuối  $E$  là:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E^{(0)} \\ y_E^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Với:

$$\begin{aligned} x_E^{(0)} = x_M &= L_1 \cos q_1 + (L_3 + q_3) \cos(q_1 + q_2) \\ y_E^{(0)} = y_M &= L_1 \sin q_1 + (L_3 + q_3) \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Các thành phần của ma trận quán tính  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  được xác định như sau:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 \mathbf{r}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} \\ &\quad + J_1 + J_2 + J_3 \\ &= m_1 c_1^2 + m_2 (c_2^2 + L_1^2 + 2c_2 L_1 \cos q_2) + m_3 [L_1^2 + (c_3 + q_3)^2 + 2(c_3 + q_3) L_1 \cos q_2] \\ &\quad + m [L_1^2 + (L_3 + q_3)^2 + 2(L_3 + q_3) L_1 \cos q_2] + J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_2 + J_3 \\ &= m_2 (c_2^2 + c_2 L_1 \cos q_2) + m_3 [(c_3 + q_3) L_1 \cos q_2 + (c_3 + q_3)^2] \\ &\quad + m [L_1 (L_3 + q_3) \cos q_2 + (L_3 + q_3)^2] + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} \\ &= m_3 L_1 \sin q_2 + m L_1 \sin q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} + J_2 + J_3 \\ &= m_2 c_2^2 + m_3 (c_3 + q_3)^2 + m (L_3 + q_3)^2 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{31} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{31} \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{r} \\ &= m_3 + m \end{aligned}$$

$$a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}$$

trong đó các ma trận đạo hàm  $\mathbf{t}_{i1}, i = 1, 2, 3$  là:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{11} &= \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{t}_{21} &= \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{t}_{31} &= \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tay máy chịu lực cản nhớt tại các khớp được cho bởi:

$$\mathbf{F}_c = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Trong đó  $\mathbf{B}$  là ma trận đường chéo chứa các hệ số cản nhớt.

Thế năng của tay máy được xác định như sau:

$$\Pi = -\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{C_i}^{(0)} - m \mathbf{g}^T \mathbf{r}_E^{(0)}$$

Với:

$$\mathbf{g}^T = [0 \quad -g];$$

$$\mathbf{r}_{C_1}^{(0)} = [c_1 \cos q_1 \quad c_1 \sin q_1]^T;$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_2}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_2}^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}_{C_2}^{(0)} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + c_2 \cos(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin q_1 + c_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_3}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_3}^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}_{C_3}^{(0)} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + (c_3 + q_3) \cos(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin q_1 + (c_3 + q_3) \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

Từ đó ta tính được:

$$\begin{aligned} \Pi = & g [m_1 c_1 + (m_2 + m_3 + m) L_1] \sin q_1 \\ & + g [c_2 m_2 + (c_3 + q_3) m_3 + (L_3 + q_3) m] \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Lực suy rộng của các lực hoạt động  $\mathbf{Q}$  tính được như sau:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u} - \mathbf{G} + \mathbf{F}_c = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^T, \quad \mathbf{G} = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$$

Với:

$$\begin{aligned} Q_1 = & u_1 - b_1 \dot{q}_1 - [(m_2 + m_3 + m) g L_1 + m_1 c_1] \cos q_1 \\ & - [c_2 m_2 + (c_3 + q_3) m_3 + (L_3 + q_3) m] g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

$$Q_2 = u_2 - b_2 \dot{q}_2 - [c_2 m_2 + (c_3 + q_3) m_3 + (L_3 + q_3) m] g \cos(q_1 + q_2)$$

$$Q_3 = u_3 - b_3 \dot{q}_3 - (m_3 + m) g \sin(q_1 + q_2)$$

Để tính lực suy rộng của các lực quán tính  $\mathbf{Q}_{qt} = [Q_1^{qt} \quad Q_2^{qt} \quad Q_3^{qt}]^T$ , ta xây dựng các ma trận sau đây [1]:

$$\partial_1 \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{32}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_1} \end{bmatrix}; \quad \partial_2 \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{32}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_2} \end{bmatrix};$$

$$\partial_3 \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{32}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_3} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}_3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có:

$$\mathbf{Q}_{qt} = \mathbf{Q}_{qt1} - \mathbf{Q}_{qt2} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^T \partial_1 \mathbf{A} \quad \dot{\mathbf{q}}^T \partial_2 \mathbf{A} \quad \dot{\mathbf{q}}^T \partial_3 \mathbf{A}]^T \dot{\mathbf{q}} - \sum_{i=1}^3 \partial_i \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i$$

$$Q_1^{qt} = \left[ 2 \left( \dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2} \right) \dot{q}_2 L_1 c_2 \sin q_2 \right] m_2$$

$$+ \left[ 2 \left( \dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2} \right) \dot{q}_2 L_1 (c_3 + q_3) \sin q_2 - 2 \dot{q}_3 (L_1 \cos q_2 + c_3 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] m_3$$

$$+ \left[ 2 \left( \dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_2}{2} \right) \dot{q}_2 L_1 (L_3 + q_3) \sin q_2 - 2 \dot{q}_3 (L_1 \cos q_2 + L_3 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] m$$

$$Q_2^{qt} = \left( -\dot{q}_1^2 L_1 \sin q_2 \right) c_2 m_2$$

$$- \left[ (c_3 + q_3) L_1 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + 2(c_3 + q_3) (\dot{q}_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \dot{q}_3) \right] m_3$$

$$- \left[ (L_3 + q_3) L_1 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + 2(L_3 + q_3) (\dot{q}_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \dot{q}_3) \right] m$$

$$Q_3^{qt} = \left[ L_1 \dot{q}_1^2 \cos q_2 + (c_3 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right] m_3$$

$$+ \left[ L_1 \dot{q}_1^2 \cos q_2 + (L_3 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right] m$$

Ta có thể viết lại hệ phương trình vi phân chuyển động của tay máy robot từ phương trình dạng ma trận (2.13) như sau:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_{13}\ddot{q}_3 - Q_1 - Q_1^{qt} = 0 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 - Q_2 - Q_2^{qt} = 0 \\ a_{31}\ddot{q}_1 + a_{32}\ddot{q}_2 + a_{33}\ddot{q}_3 - Q_3 - Q_3^{qt} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Hệ phương trình (3.2) sẽ được sử dụng để giải các gia tốc suy rộng  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$  là hàm của các đại lượng  $\{q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, u_1, u_2, u_3, \dots\}$ , phục vụ cho bài toán điều khiển tối ưu.

### 3.1.3. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu

Yêu cầu đặt ra là xác định biến điều khiển  $\mathbf{u}(t)$  và quy luật chuyển động trong không gian khớp  $\mathbf{q}(t)$  tương ứng để điểm cuối của tay máy di chuyển từ vị trí đầu  $M_0(x_0, y_0)$  tương ứng với cấu hình ban đầu  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ , đến vị trí đích  $M_f(x_f, y_f)$  ứng với cấu hình cuối  $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$ , trong đó các đại lượng  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, t_f$  được cho trước, và thỏa mãn tiêu chí tối ưu nỗ lực điều khiển biểu diễn thông qua tích phân bình phương lực/mômen điều khiển theo thời gian:

$$J = \int_0^{t_f} f_0 dt \rightarrow \min \quad (3.3)$$

với

$$f_0 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (3.4)$$

Xác định hàm Hamilton có dạng như biểu thức (2.25) như sau:

$$H = -f_0 + p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 f_3 + p_4 f_4 + p_5 f_5 + p_6 f_6 \quad (3.5)$$

trong đó  $p_i, i = \overline{1..6}$  là các biến liên hợp và

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{q}_1; f_2 = \dot{q}_2; f_3 = \dot{q}_3; f_4 = \ddot{q}_1; f_5 = \ddot{q}_2; f_6 = \ddot{q}_3 \\ q_4 &= \dot{q}_1; q_5 = \dot{q}_2; q_6 = \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Chú ý rằng, các gia tốc suy rộng được rút ra từ hệ phương trình động lực học của tay máy (3.2).

Hệ phương trình trạng thái:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}; & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}; & \frac{dq_3}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_3}; \\ \frac{dq_4}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_4}; & \frac{dq_5}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_5}; & \frac{dq_6}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_6} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hệ phương trình liên hợp:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}; & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}; & \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_3}; \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_4}; & \frac{dp_5}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_5}; & \frac{dp_6}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_6} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Theo nguyên lý Pontryagin, các biến điều khiển  $\mathbf{u}(t)$  được xác định qua điều kiện đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \quad (3.9)$$

Thay các giá trị biến điều khiển  $\mathbf{u}(t)$  tìm được từ hệ phương trình (3.9) vào các phương trình (3.7), (3.8) sẽ thu được một hệ 12 phương trình vi phân với 12 ẩn là  $q_i, p_i$  với  $i = \overline{1..6}$ . Giải hệ phương trình vi phân này với các điều kiện biên sẽ thu được nghiệm điều khiển tối ưu và quy luật chuyển động tương ứng của tay máy.

### 3.1.4. Kết quả mô phỏng nghiệm điều khiển tối ưu

#### a) Thiết lập mô phỏng

Thực hiện mô phỏng tính với các tham số của tay máy như sau:

$$m_1 = 4,8; m_2 = 2,4; m_3 = 3,0; m = 1,5 \text{ [kg]}$$

$$L_1 = 1,0; L_2 = 0,5; L_3 = 0,6 \text{ [m]}$$

$$c_1 = 0,5; c_2 = 0,25; c_3 = 0,3 \text{ [m]}$$

$$J_1 = 0,4; J_2 = 0,05; J_3 = 0,09 \text{ [kg.m}^2\text{]}$$

$$b_1 = 5; b_2 = 5 \text{ [N.m.s/rad]}; b_3 = 5 \text{ [kg/s]}$$

$$g = 10 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$t_f = 2,0 \text{ [s]}$$

Cấu hình ban đầu và cấu hình cuối của tay máy được chọn như sau:

$$M_0: q_1(0) = 0; q_2(0) = 0,2 \text{ [rad]}; q_3(0) = 0,1 \text{ [m]}$$

$$M_f: q_1(t_f) = 1,4; q_2(t_f) = 1,0 \text{ [rad]}; q_3(t_f) = 0,5 \text{ [m]}$$

Điều kiện biên của vận tốc khớp được chọn như sau:

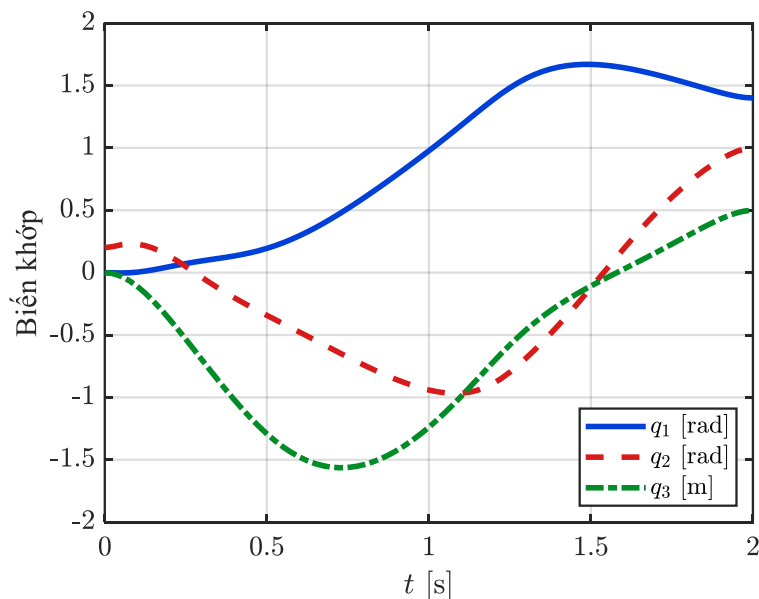
$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = \dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = \dot{q}_3(t_f) = 0$$

Phiếm hàm mục tiêu:  $z = \int_0^t f_0 dt$  với  $z(0) = 0$ .

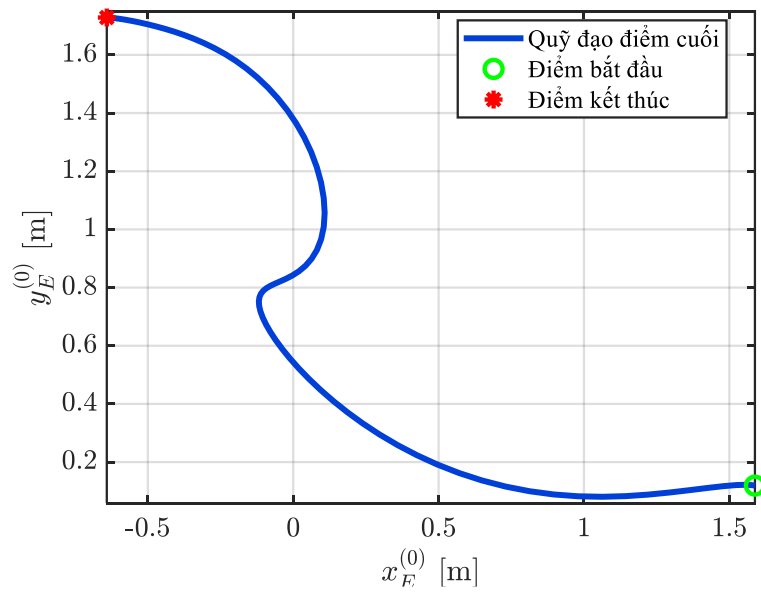
Hệ phương trình với các điều kiện biên được giải theo phương pháp điểm ghép (collocation method) bằng phần mềm MATLAB<sup>®</sup>, được trình bày trong phần Phụ lục.

### b) Kết quả mô phỏng

Các đồ thị của các đại lượng thu được từ mô phỏng số được thể hiện từ *Hình 3.2* đến *Hình 3.8*.

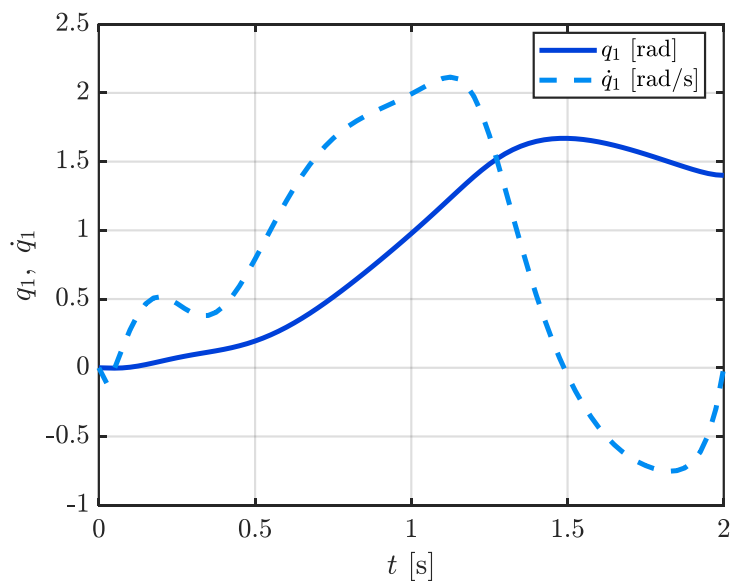


*Hình 3.2. Đồ thị các biến khớp*

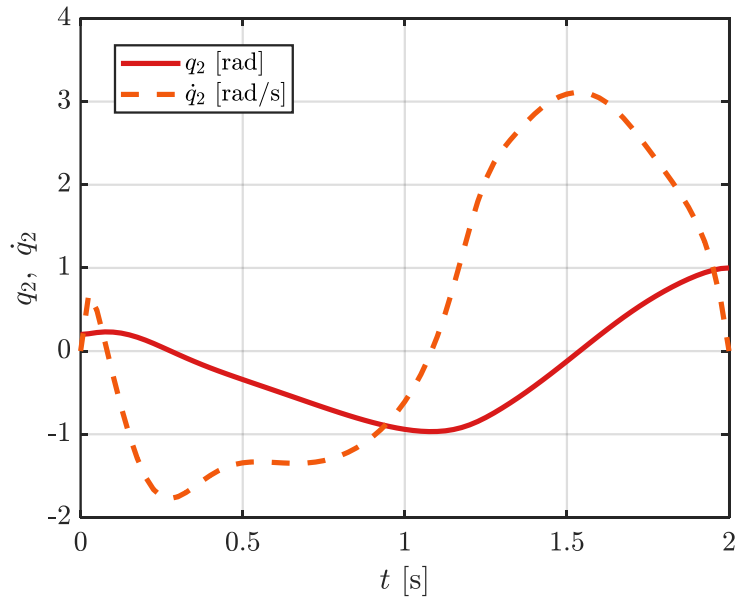


Hình 3.3. Đồ thị quỹ đạo chuyển động điểm cuối

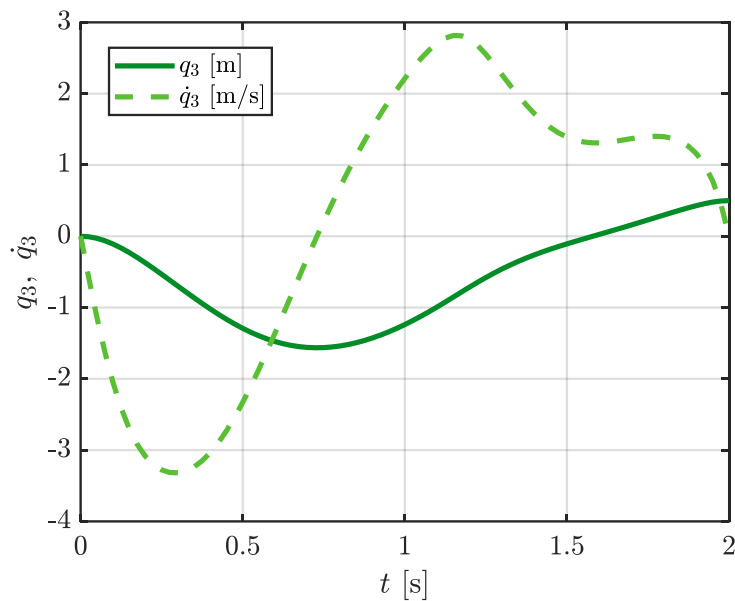
Trong **Hình 3.2**, các biến khớp  $q_1, q_2, q_3$  biến thiên liên tục theo thời gian và giá trị góc khớp tại thời điểm  $t = 0$  và  $t = t_f$  đúng với điểm đầu và điểm đích tại điều kiện biên. Điều đó cho thấy nghiệm tối ưu thu được bảo đảm tay máy chuyển từ cấu hình ban đầu đến cấu hình cuối yêu cầu. Cùng với đó, quỹ đạo chuyển động của điểm cuối trên **Hình 3.3** có dạng đường cong liên tục, cho thấy tay máy đã thực hiện được chuyển động điểm-điểm trong mặt phẳng làm việc phù hợp với yêu cầu.



Hình 3.4. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 1

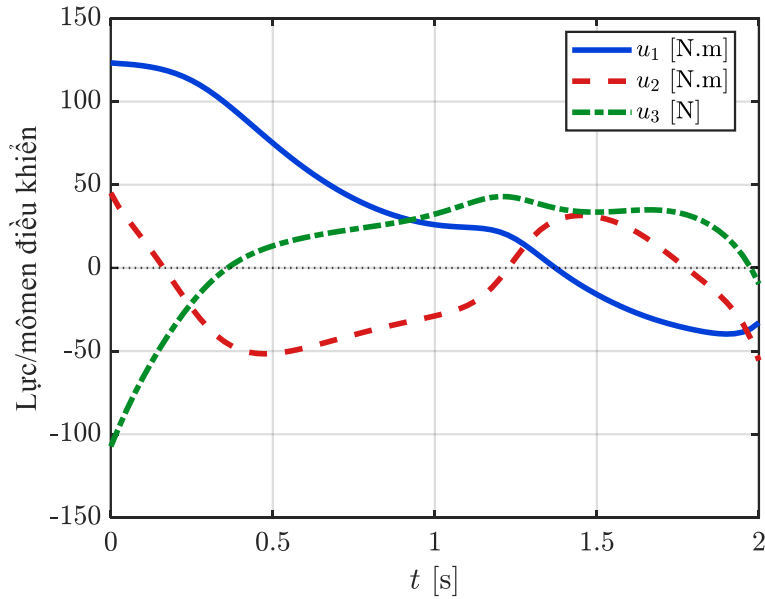


Hình 3.5. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 2

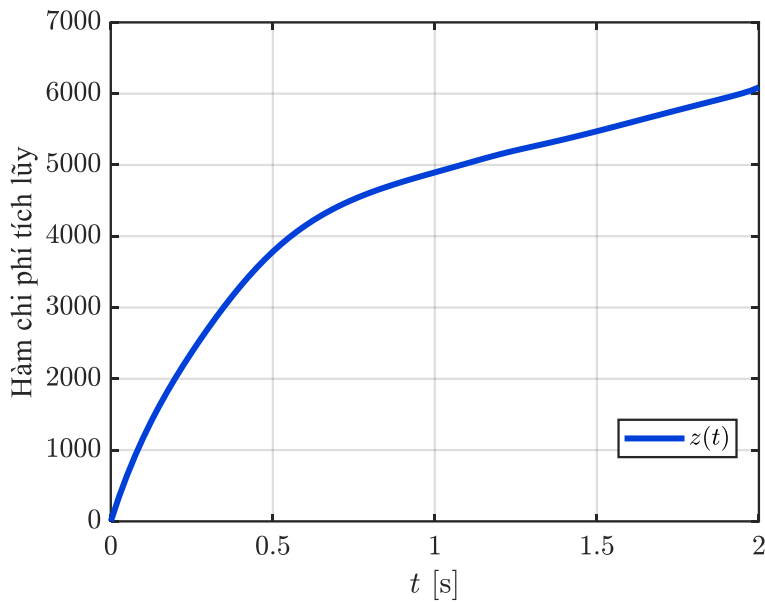


Hình 3.6. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 3

Trên *Hình 3.4* đến *Hình 3.6* thể hiện góc khớp và vận tốc khớp tương ứng của mỗi khâu. Các vận tốc khớp biến thiên liên tục, không xuất hiện dao động lớn và thỏa mãn điều kiện vận tốc bằng không tại thời điểm đầu và cuối. Quy luật biến thiên của vận tốc cũng phù hợp với chiều hướng biến đổi của các biến khớp, phản ánh tính hợp lý về mặt động học của chuyển động tối ưu. Kết quả này cho thấy quỹ đạo thu được không chỉ thỏa mãn điều kiện đầu và điều kiện cuối, mà còn bảo đảm tính ổn định của quá trình chuyển động.



Hình 3.7. Đồ thị các lực và mômen điều khiển



Hình 3.8. Đồ thị hàm chi phí tích lũy

Lực và mômen điều khiển trên [Hình 3.7](#) đều có sự biến đổi liên tục, không xuất hiện dao động lớn hoặc đột biến. Tính đơn điệu của hàm mục tiêu trong [Hình 3.8](#) cho thấy tích lũy chi phí điều khiển. Tại thời điểm cuối, giá trị hàm mục tiêu của nghiệm điều khiển tối ưu thu được là  $J \approx 6089,07$ . Giá trị này được dùng làm cơ sở để so sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng ở phần tiếp theo.

### 3.1.5. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối xứng

Các quy luật chuyển động đối xứng được xây dựng với cùng điều kiện chuyển động của bài toán điều khiển tối ưu như sau:

$$t_0 = 0, t_f = 2,0 [\text{s}]$$

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}(t_f) = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 1,0 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Đối với quy luật đa thức bậc năm, ngoài các điều kiện về vị trí và vận tốc, gia tốc khớp tại thời điểm đầu và cuối được chọn bằng không, tức là:

$$\ddot{\mathbf{q}}(0) = \ddot{\mathbf{q}}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Đối với quy luật S-curve 7 pha, chuyển động được chọn ở dạng đối xứng. Gọi  $T_j = 0,2 [\text{s}]$  là thời gian của mỗi pha có độ giạt khác không,  $T_a = 0,3 [\text{s}]$  là thời gian của mỗi pha giữ gia tốc không đổi và  $T_v = 0,6 [\text{s}]$  là thời gian của pha vận tốc không đổi. Khi đó, các mốc thời gian của bảy pha được xác định như sau:

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = T_j = 0,2 [\text{s}]$$

$$t_2 = T_j + T_a = 0,5 [\text{s}]$$

$$t_3 = 2T_j + T_a = 0,7 [\text{s}]$$

$$t_4 = 2T_j + T_a + T_v = 1,3 [\text{s}]$$

$$t_5 = 3T_j + T_a + T_v = 1,5 [\text{s}]$$

$$t_6 = 3T_j + 2T_a + T_v = 1,8 [\text{s}]$$

$$t_7 = 4T_j + 2T_a + T_v = t_f = 2 [\text{s}]$$

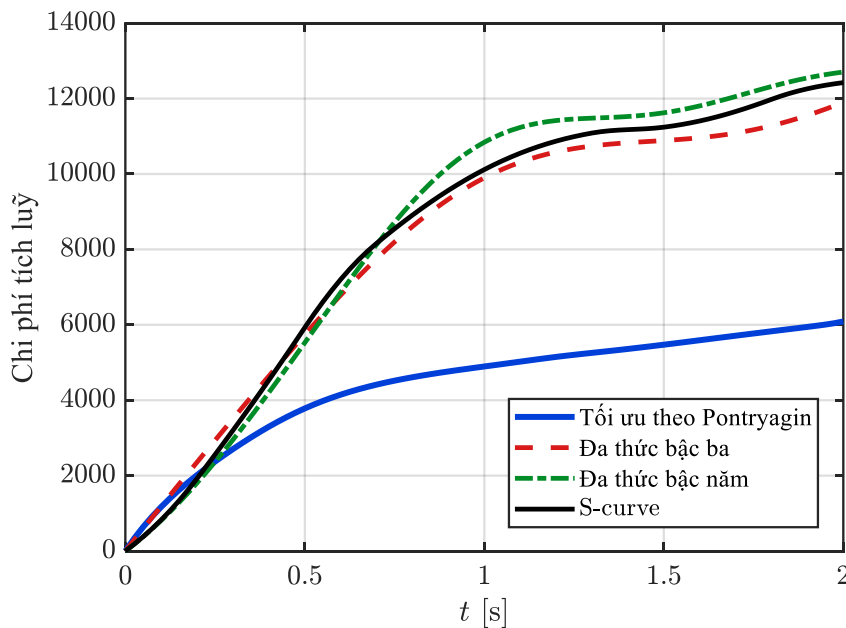
Giá trị giới hạn của độ giạt trong quy luật S-curve được xác định từ điều kiện dịch chuyển  $\Delta q_i = q_i(t_f) - q_i(0)$  như sau:

$$j_{m,i} = \frac{\Delta q_i}{T_j \left[ 2T_j^2 + 3T_j T_a + T_a^2 + T_v (T_j + T_a) \right]} \quad (3.10)$$

Từ đó, gia tốc cực đại và vận tốc cực đại tương ứng của biến khớp thứ  $i$  được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_{m,i} = j_{m,i} T_j \\ v_{m,i} = j_{m,i} T_j (T_j + T_a) \end{cases} \quad (3.11)$$

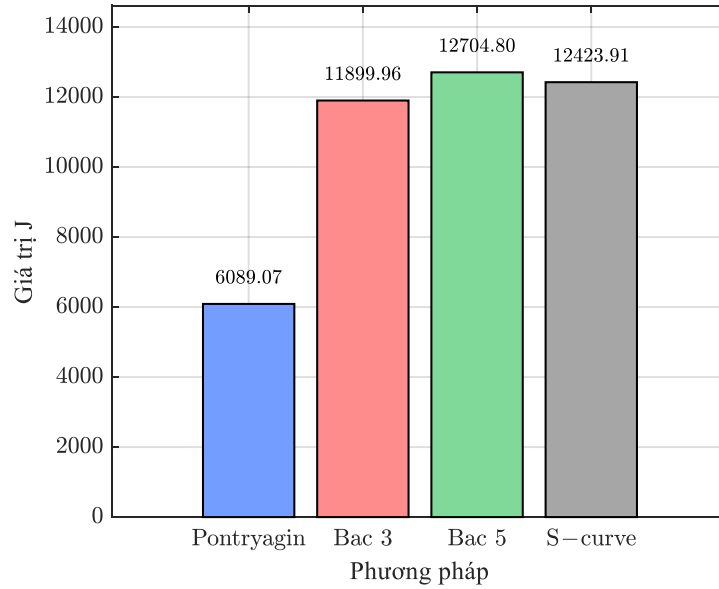
Sau khi xây dựng các quy luật chuyển động đối chứng, các hàm  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  của từng phương án được thay vào phương trình động lực học của tay máy để tính lực/mômen điều khiển. Giá trị hàm mục tiêu  $J$  được tính theo cùng biểu thức đã sử dụng cho nghiệm điều khiển tối ưu, kết quả thể hiện trên *Hình 3.9* đến *Hình 3.13* và *Bảng 3.1*.



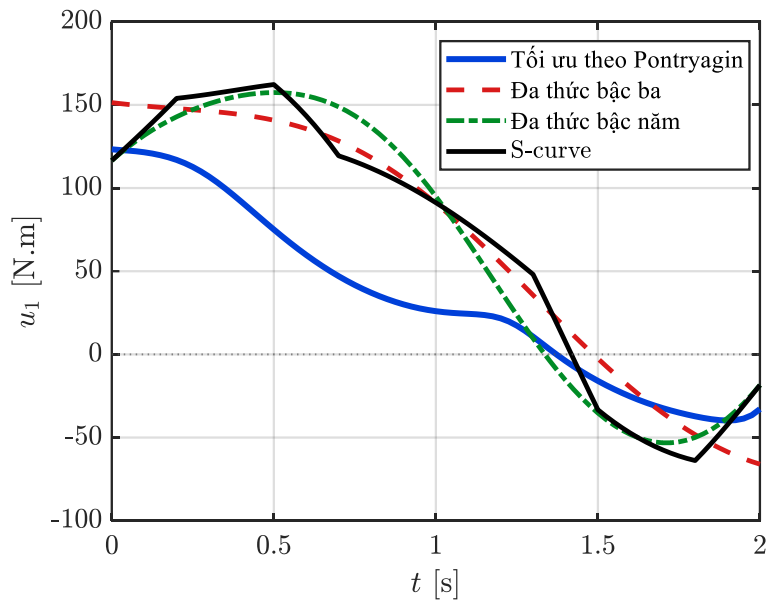
*Hình 3.9. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động*

Từ *Hình 3.9*, có thể thấy các hàm chi phí tích lũy của bốn phương án đều tăng theo thời gian, phù hợp với dạng hàm mục tiêu được xây dựng từ bình phương lực/mômen điều khiển. Tuy nhiên, tốc độ tăng và giá trị cuối cùng của hàm chi phí có sự khác biệt rõ rệt giữa nghiệm điều khiển tối ưu theo nguyên lý Pontryagin và các quy luật chuyển động đối chứng. Đối với nghiệm Pontryagin, hàm chi phí tăng tương tự các quy luật đối chứng trong giai đoạn

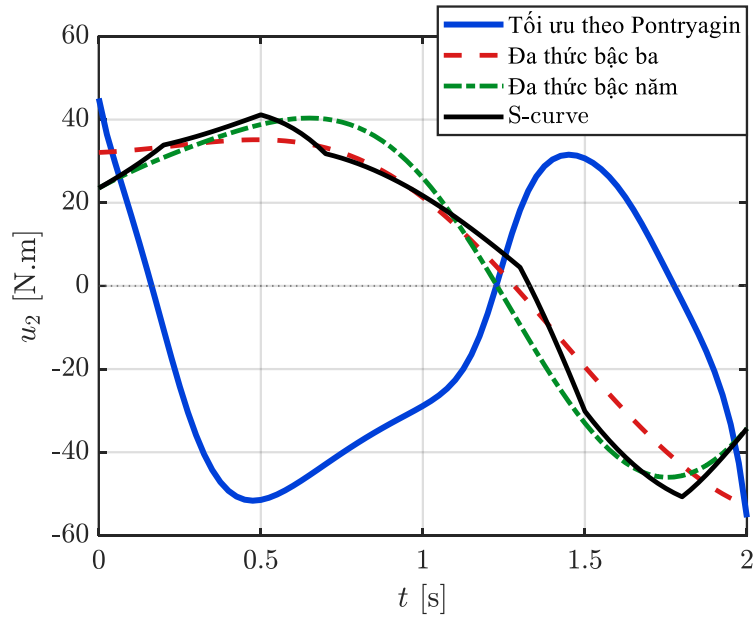
đầu nhưng sau đó có xu hướng tăng chậm lại. Trong khi đó, các quy luật đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve cho giá trị chi phí tích lũy cuối cùng xấp xỉ nhau và đều lớn hơn nghiệm tối ưu.



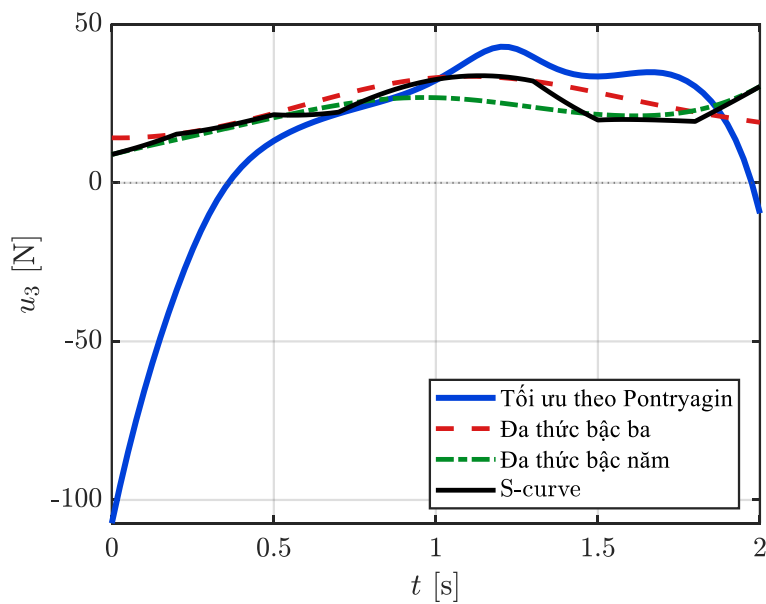
Hình 3.10. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu



Hình 3.11. Đồ thị mômen  $u_1$  của các quy luật chuyển động



Hình 3.12. Đồ thị mômen  $u_2$  của các quy luật chuyển động



Hình 3.13. Đồ thị lực  $u_3$  của các quy luật chuyển động

Bảng 3.1. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động đến điểm đích

Quy luật chuyển động	Giá trị hàm mục tiêu $J$	Mức giảm của nghiệm tối ưu so với các quy luật đối chứng
Tối ưu theo Pontryagin	6089,07	

Quy luật chuyển động	Giá trị hàm mục tiêu $J$	Mức giảm của nghiệm tối ưu so với các quy luật đối chứng
Đa thức bậc ba	11899,96	48,83%
Đa thức bậc năm	12704,80	52,07%
S-curve	12423,91	50,99%

Kết quả trên *Hình 3.10* và *Bảng 3.1* cho thấy nghiệm điều khiển tối ưu theo nguyên lý Pontryagin đạt giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất. So với các quy luật đối chứng, nghiệm tối ưu làm giảm giá trị hàm mục tiêu từ khoảng 48,83% đến 52,07%. Nguyên nhân chính của sự giảm chi phí thể hiện rõ trên các đồ thị lực và mômen điều khiển trên *Hình 3.11* đến *Hình 3.13*. Trong giai đoạn đầu, các lực/mômen điều khiển của nghiệm tối ưu, đặc biệt là mômen  $u_2$  và  $u_3$ , có giá trị tức thời lớn hơn so với ba quy luật đối chứng. Tuy nhiên, sau giai đoạn này, mômen  $u_1$  của nghiệm tối ưu giảm xuống mức thấp và được duy trì trong một khoảng thời gian dài. Ngược lại, đối với ba quy luật đối chứng,  $u_1$  vẫn duy trì ở mức cao trong phần lớn hành trình. Do hàm chi phí phụ thuộc vào tích phân bình phương của lực/mômen điều khiển, lợi ích thu được từ việc giảm kéo dài thành phần mômen có biên độ lớn nhất đã vượt trội so với phần chi phí tăng thêm do đỉnh ngắn hạn ở đầu chuyển động. Vì vậy, mặc dù nghiệm tối ưu xuất hiện giá trị điều khiển cực đại lớn hơn tại một số thời điểm, giá trị chi phí nỗ lực điều khiển cuối cùng vẫn nhỏ hơn đáng kể so với các quy luật chuyển động đối chứng.

### 3.2. Điều khiển tối ưu tay máy chuyển động điểm-điểm theo chu trình

#### 3.2.1. Đặt bài toán

Trong mục này, bài toán điều khiển tối ưu tay máy theo chu trình được khảo sát. Đây là dạng mô hình thường gặp trong các bài toán bốc xếp, xếp dỡ và palletizing, trong đó tay máy thực hiện chuyển động đi và về theo một chu trình làm việc khép kín. So với bài toán đến điểm đích đã xét ở mục 3.1, điểm

khác biệt cơ bản ở đây là chuyển động của tay máy không chỉ gồm một hành trình đơn lẻ, mà gồm hai giai đoạn kế tiếp nhau: giai đoạn mang tải từ vị trí đầu đến vị trí cuối và giai đoạn quay về không tải. Vì vậy, bài toán tối ưu không còn đặt ra cho một hành trình riêng lẻ mà được xét cho toàn bộ chu trình làm việc của tay máy.

Xét tay máy phẳng RRP như trong mục 3.1. Các mômen dẫn động tại các khớp được chọn làm biến điều khiển của hệ. Ký hiệu vectơ điều khiển là

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Đặc trưng của bài toán theo chu trình là tải trọng tại điểm tác động cuối thay đổi theo từng giai đoạn chuyển động. Cụ thể, trong hành trình đi, tay máy mang tải trọng  $m_d$ , còn trong hành trình về tay máy chuyển động không tải, tức tải trọng tại điểm cuối được lấy bằng không. Như vậy, toàn bộ chu trình làm việc của tay máy gồm hai giai đoạn:

- Giai đoạn thứ nhất: tay máy mang tải di chuyển từ vị trí đầu đến vị trí cuối;
- Giai đoạn thứ hai: tay máy không tải di chuyển từ vị trí cuối trở về vị trí ban đầu hoặc một cấu hình làm việc xác định.

Cách mô tả này phản ánh đúng đặc điểm làm việc của tay máy trong các hệ thống làm việc theo chu trình. Ngoài ra, giai đoạn đi còn gọi là pha đi, còn giai đoạn về còn gọi là pha về.

Ký hiệu thời gian chuyển động của giai đoạn đi là  $t_{f_1}$ , thời gian chuyển động của giai đoạn về là  $t_{f_2}$ . Khi đó, thời gian toàn chu trình được xác định bởi

$$t_f = t_{f_1} + t_{f_2} \quad (3.13)$$

Trong từng giai đoạn, tay máy có các điều kiện biên riêng. Đối với giai đoạn thứ nhất, trạng thái ban đầu của tay máy được xác định tại  $t = 0$ , còn trạng thái cuối được xác định tại  $t = t_{f_1}$ . Đối với giai đoạn thứ hai, trạng thái đầu của

giai đoạn này chính là trạng thái cuối của giai đoạn thứ nhất, còn trạng thái cuối được xác định tại  $t = t_f$ . Như vậy, hai giai đoạn của chu trình không độc lập với nhau, mà liên kết chặt chẽ thông qua điều kiện chuyển tiếp tại thời điểm  $t = t_{f1}$ , đây còn gọi là thời điểm đổi pha giữa pha đi và pha về.

Yêu cầu đặt ra là xác định các quy luật điều khiển  $\mathbf{u}(t)$  tương ứng với toàn bộ chu trình sao cho tay máy thực hiện được đầy đủ hai hành trình đi và về theo các điều kiện biên đã cho, đồng thời bảo đảm tiêu chuẩn tối ưu theo yêu cầu. Bài toán không chỉ yêu cầu tay máy hoàn thành đúng chu trình chuyển động, mà còn phải lựa chọn được luật điều khiển tối ưu xét trên toàn bộ quá trình đi có tải và về không tải.

### 3.2.2. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu

Như đã trình bày, chuyển động của tay máy bao gồm hai giai đoạn. Ở giai đoạn thứ nhất, điểm tác động cuối của tay máy di chuyển từ vị trí đầu  $M_0(x_0, y_0)$  ứng với cấu hình ban đầu  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  đến vị trí cuối  $M_d(x_d, y_d)$  ứng với cấu hình  $\mathbf{q}(t_{f1}) = \mathbf{q}_d$  tại thời điểm  $t = t_{f1}$  cho trước, với tải trọng mang theo là  $m = m_d$ . Ở giai đoạn thứ hai, tay máy chuyển động không tải từ vị trí  $M_d$  trở về vị trí  $M_f \equiv M_0$  ứng với cấu hình  $\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_0$  trong thời gian  $t_{f2}$ . Hàm mục tiêu được lựa chọn cho mỗi giai đoạn của chuyển động là

$$J = \int_0^{t_f} f_0 dt \rightarrow \min \quad (3.14)$$

với

$$f_0 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (3.15)$$

Xác định hàm Hamilton có dạng như biểu thức (3.5). Trong giai đoạn đi và giai đoạn về, cấu trúc của hệ phương trình động lực học giữ nguyên, nhưng các hệ số trong phương trình sẽ thay đổi tương ứng với giá trị tải trọng tại điểm tác động cuối. Ở mỗi giai đoạn chuyển động, tay máy được mô tả bởi một hệ gồm 12 phương trình vi phân cấp một đối với sáu biến trạng thái (3.7) và sáu

biến liên hợp (3.8), kết hợp với điều kiện tối ưu (3.9). Giải hệ phương trình vi phân này với các điều kiện biên sẽ thu được nghiệm tối ưu cần tìm.

### 3.2.3. Kết quả mô phỏng nghiệm điều khiển tối ưu

#### a) Thiết lập mô phỏng

Thực hiện mô phỏng tính toán với các tham số được chọn như trong mục 3.1.4 với  $t_{f_1} = t_{f_2} = 2[s]$ ,  $t_f = t_{f_1} + t_{f_2} = 4[s]$ . Các điều kiện biên của bài toán chuyển động theo chu trình được chọn như sau:

- Điều kiện biên của giai đoạn đi (pha đi):

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0 [\text{rad}]; q_2(0) = 0,2 [\text{rad}]; q_3(0) = 0 [\text{m}]; \\ q_1(t_{f_1}) &= 1,4 [\text{rad}]; q_2(t_{f_1}) = 1,0 [\text{rad}]; q_3(t_{f_1}) = 0,5 [\text{m}] \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = \dot{q}_1(t_{f_1}) = \dot{q}_2(t_{f_1}) = \dot{q}_3(t_{f_1}) = 0 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Điều kiện biên của giai đoạn về (pha về):

$$\begin{aligned} q_1(t_{f_1}) &= 1,4 [\text{rad}]; q_2(t_{f_1}) = 1,0 [\text{rad}]; q_3(t_{f_1}) = 0,5 [\text{m}]; \\ q_1(t_f) &= 0 [\text{rad}]; q_2(t_f) = 0,2 [\text{rad}]; q_3(t_f) = 0 [\text{m}]; \\ \dot{q}_1(t_{f_1}) &= \dot{q}_2(t_{f_1}) = \dot{q}_3(t_{f_1}) = \dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = \dot{q}_3(t_f) = 0; \end{aligned}$$

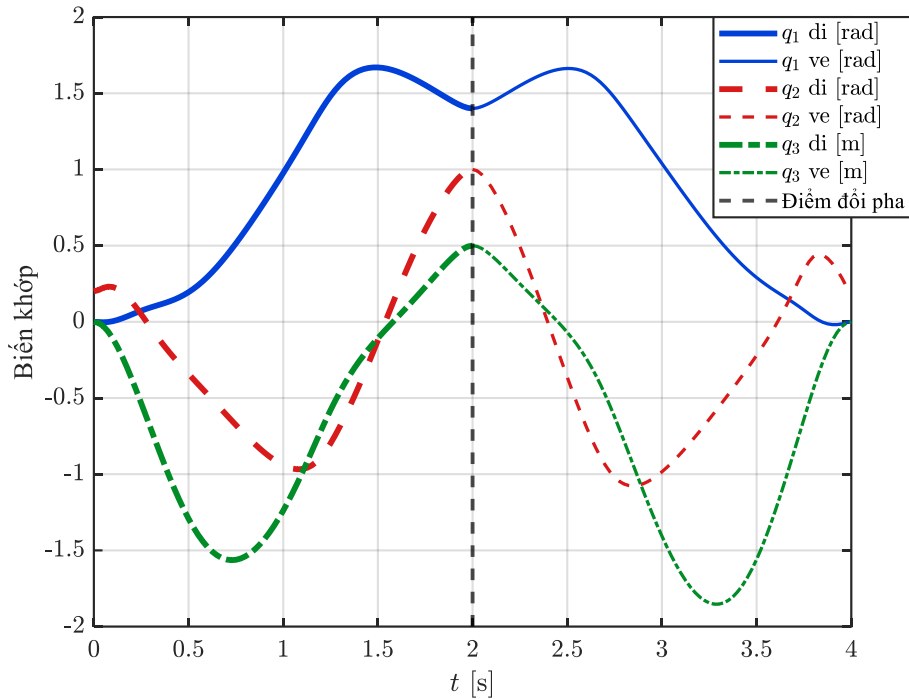
#### b) Kết quả mô phỏng

Kết quả mô phỏng số ứng với giai đoạn đi được trình bày trên *Hình 3.14* đến *Hình 3.18*.

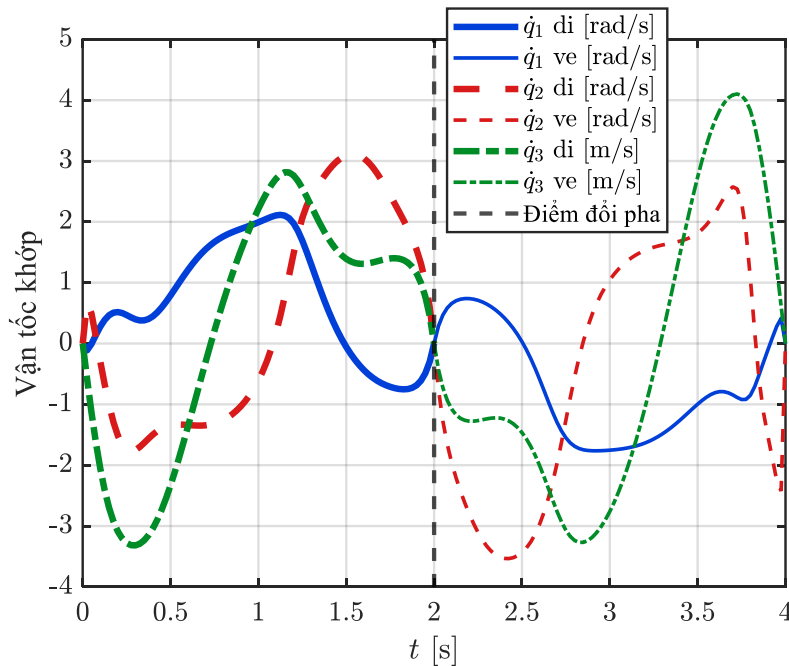
Từ *Hình 3.14* có thể thấy các biến khớp biến thiên liên tục trong cả hai giai đoạn đi và về. Tại thời điểm  $t = t_{f_1} = 2,0[s]$ , các biến khớp đạt đúng cấu hình tại điểm đối pha; sau đó tay máy tiếp tục thực hiện giai đoạn về để trở lại cấu hình ban đầu tại  $t = t_f = 4[s]$ . Kết quả này cho thấy nghiệm điều khiển tối ưu thu được thỏa mãn các điều kiện biên về vị trí của bài toán chuyển động điểm–điểm theo chu trình.

*Hình 3.15* biểu diễn vận tốc khớp trong toàn bộ chu trình. Có thể thấy vận tốc các khớp tại thời điểm bắt đầu, tại điểm đối pha và tại thời điểm kết thúc

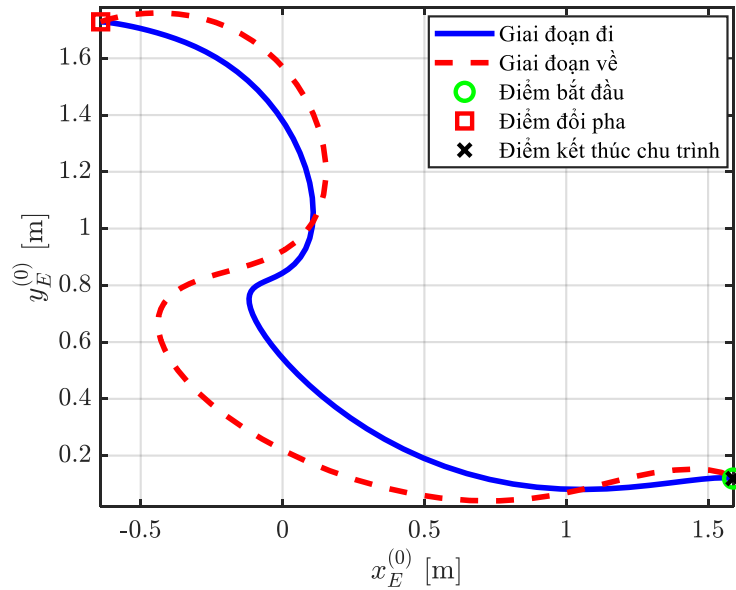
chu trình đều bằng không. Điều này phù hợp với điều kiện biên đã đặt ra. Như vậy, tay máy dừng tại điểm đổi pha trước khi thực hiện hành trình về, bảo đảm chu trình đi-về có tính liên tục về trạng thái vận tốc tại các điểm nối.



Hình 3.14. Đồ thị các góc khớp giai đoạn đi và về

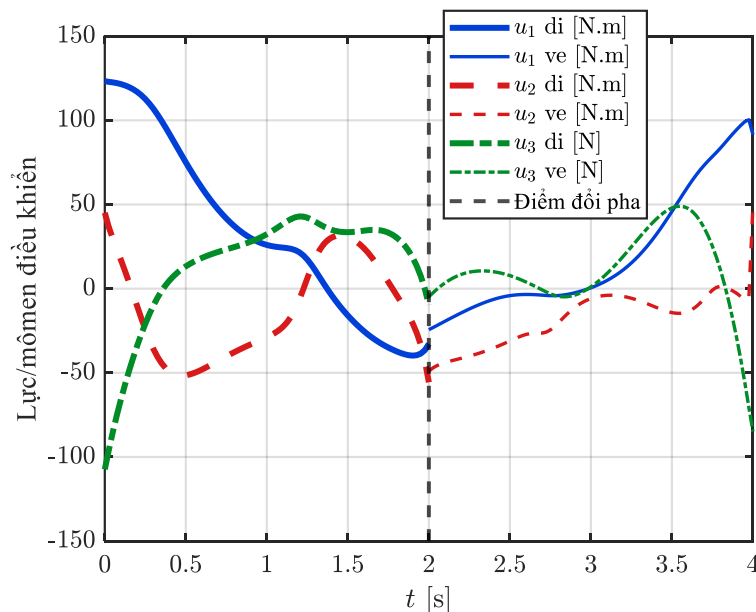


Hình 3.15. Đồ thị các vận tốc khớp giai đoạn đi và về



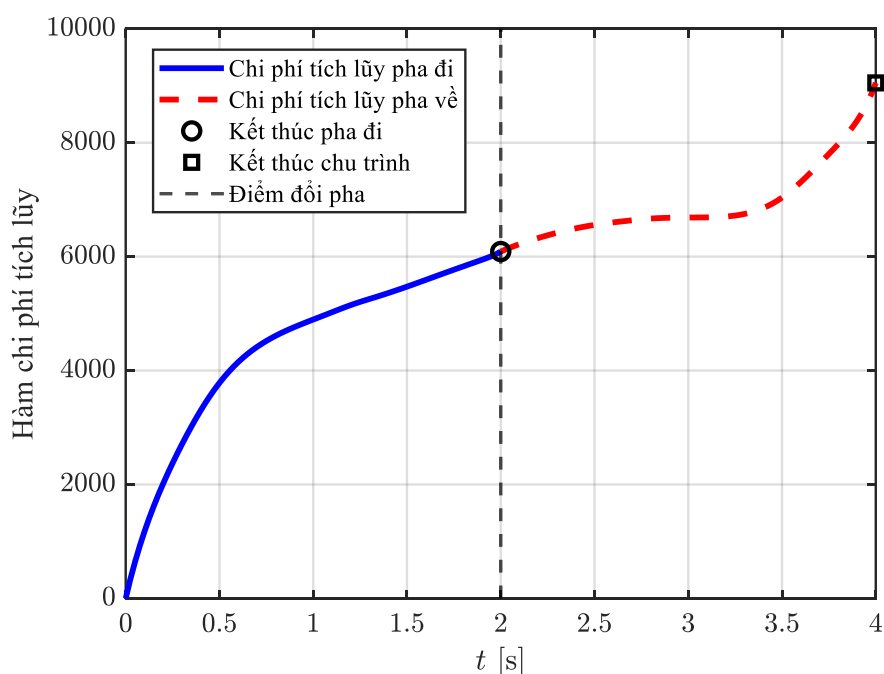
Hình 3.16. Đồ thị vị trí điểm tác động cuối

Đường quỹ đạo của giai đoạn đi và giai đoạn về trong Hình 3.16 nối các vị trí đầu, vị trí đổi pha và vị trí kết thúc theo đúng yêu cầu đặt ra. Do bài toán được đặt trong không gian khớp, quỹ đạo điểm cuối trong không gian thao tác không nhất thiết là đường thẳng, mà phụ thuộc vào nghiệm tối ưu của các biến khớp và mô hình động lực học của tay máy. Kết quả mô phỏng cho thấy điểm tác động cuối thực hiện được chuyển động khứ hồi giữa hai vị trí yêu cầu trong mặt phẳng làm việc.



Hình 3.17. Đồ thị mômen điều khiển giai đoạn đi và về

*Hình 3.17* biểu diễn các mômen điều khiển trong giai đoạn đi và giai đoạn về. Các mômen điều khiển biến thiên liên tục trong từng giai đoạn và không xuất hiện dao động bất thường. *Hình 3.18* thể hiện giá trị tích lũy của hàm mục tiêu trong toàn bộ chu trình. Trong giai đoạn đi, hàm chi phí tích lũy tăng từ  $z(0) = 0$  đến giá trị tại thời điểm đổi pha là  $z(2) \approx 6089,07$ . Sang giai đoạn về, chi phí tiếp tục được tích lũy từ giá trị cuối của giai đoạn đi đến giá trị cuối cùng của toàn chu trình. Giá trị cuối cùng của đồ thị  $z(4) \approx 9049,71$  chính là giá trị hàm mục tiêu của toàn bộ chu trình, bao gồm cả giai đoạn đi và giai đoạn về.



*Hình 3.18. Đồ thị tích lũy hàm mục tiêu giai đoạn đi và về*

Kết quả mô phỏng cho thấy bài toán điều khiển tối ưu chuyển động điểm-điểm theo chu trình đã được thiết lập và giải với các điều kiện biên đầy đủ về vị trí và vận tốc. Nghiệm thu được bảo đảm tay máy chuyển động từ cấu hình ban đầu đến cấu hình đổi pha, sau đó quay về cấu hình ban đầu, đồng thời vận tốc tại đầu chu trình, điểm đổi pha và cuối chu trình đều bằng không. Điều này làm cho chuyển động khứ hồi phù hợp hơn với các thao tác công nghiệp có tính chu kỳ, trong đó tay máy cần dừng tại vị trí thao tác trước khi chuyển sang giai đoạn tiếp theo.

### 3.2.4. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng

Để đánh giá định lượng hiệu quả của nghiệm điều khiển tối ưu trong bài toán chuyển động điểm-điểm theo chu trình, kết quả mô phỏng được so sánh với một số quy luật chuyển động đối chứng trong không gian khớp. Các quy luật đối chứng được xây dựng riêng cho giai đoạn đi và giai đoạn về, với cùng điều kiện biên, cùng thời gian chuyển động, cùng mô hình động lực học và cùng trạng thái tải trọng tương ứng như trong bài toán điều khiển tối ưu.

Đối với quy luật đa thức bậc năm, ngoài điều kiện biên về vị trí và vận tốc, gia tốc tại thời điểm đầu và cuối mỗi giai đoạn được chọn bằng không:

$$\ddot{\mathbf{q}}(0) = \ddot{\mathbf{q}}(t_{f_i}) = \ddot{\mathbf{q}}(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

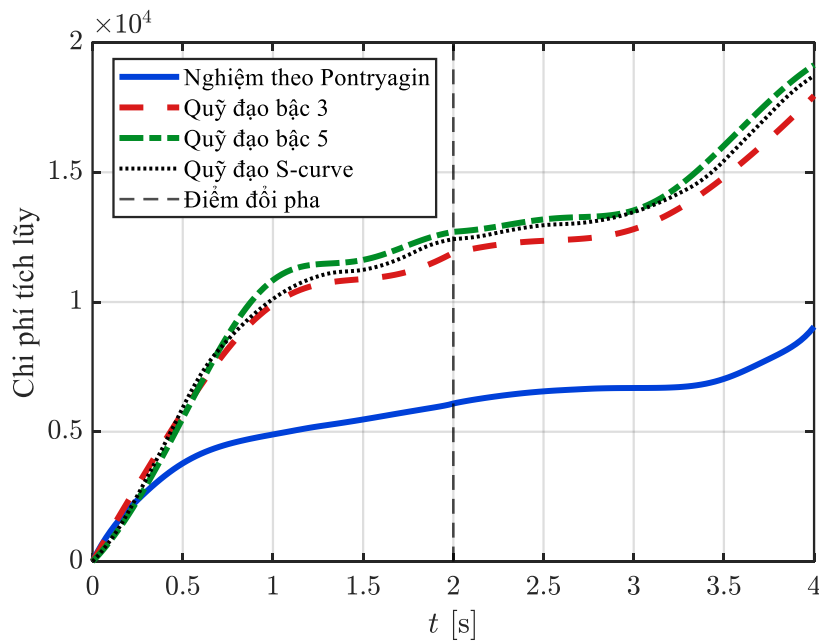
Đối với quy luật S-curve 7 pha, chuyển động được xây dựng ở dạng đối xứng cho từng giai đoạn. Với mỗi giai đoạn, các khoảng thời gian  $T_j, T_a, T_v$  được chọn sao cho  $4T_j + 2T_a + T_v = T$ .

trong đó  $T$  là thời gian chuyển động của giai đoạn đang xét. Trên cơ sở lượng dịch chuyển của từng biến khớp trong mỗi giai đoạn, các giá trị độ giật, gia tốc và vận tốc cực đại tương ứng được xác định theo công thức (3.10), (3.11).

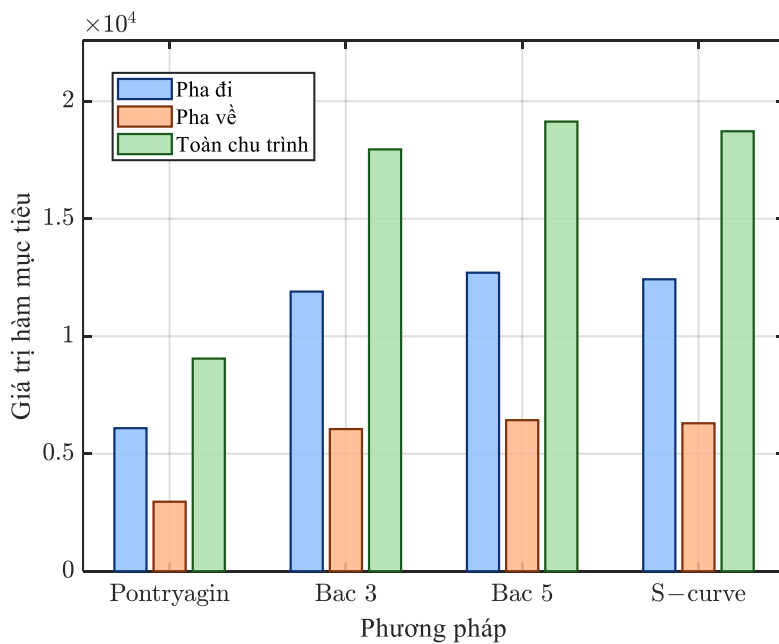
Sau khi xây dựng các quy luật chuyển động đối chứng, các hàm  $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$  của từng phương án được thay vào phương trình động lực học của tay máy để tính mômen điều khiển tương ứng. Giá trị hàm mục tiêu được tính riêng cho giai đoạn đi, giai đoạn về và toàn bộ chu trình. Kết quả thể hiện trong *Hình 3.19* đến *Hình 3.23* và *Bảng 3.2*.

Từ *Hình 3.19* có thể thấy hàm chi phí tích lũy của các phương án đều tăng theo thời gian, phù hợp với dạng hàm mục tiêu được xây dựng từ bình phương mômen điều khiển. Tại thời điểm đổi pha  $t_{f_i} = 2[s]$ , giá trị hàm mục tiêu tích lũy của nghiệm Pontryagin nhỏ hơn rõ rệt so với các quy luật đối chứng. Xu hướng này tiếp tục được duy trì trong pha về, dẫn đến giá trị hàm mục tiêu toàn

chu trình của nghiệm Pontryagin là nhỏ nhất trong các quy luật chuyển động (Hình 3.20).



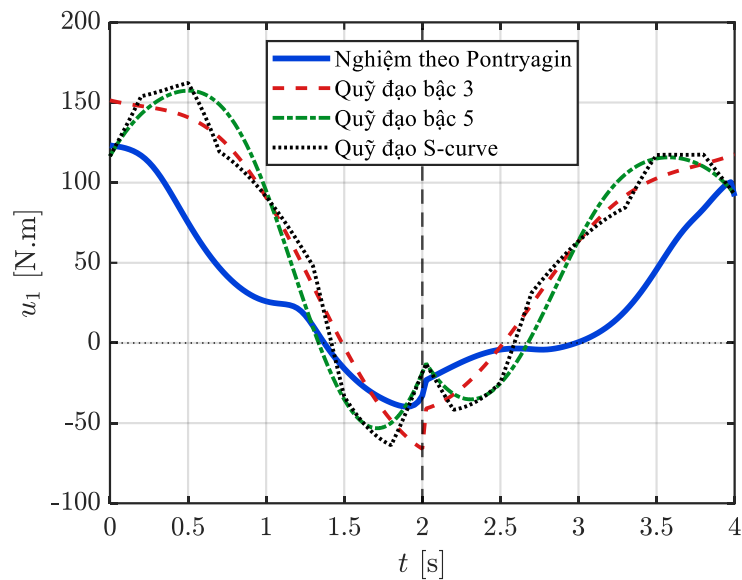
Hình 3.19. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động



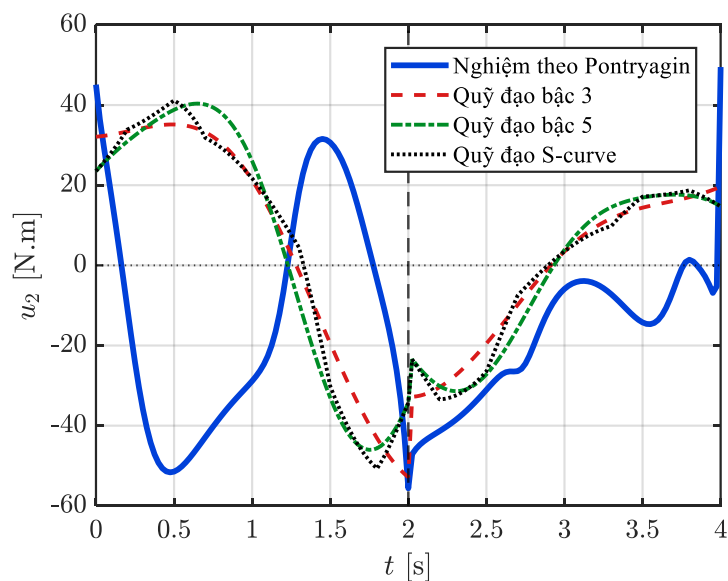
Hình 3.20. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu

Các đồ thị mômen trên Hình 3.21 đến Hình 3.23 cho thấy nguyên nhân chính làm giảm chi phí nằm ở khớp 1, tức mômen  $u_1$ . Độ lớn cực đại của  $u_1$  theo nghiệm Pontryagin là khoảng 123,286 N.m, thấp hơn đáng kể so với quỹ đạo bậc 3 (khoảng 151,374 N.m), bậc 5 (khoảng 157,406 N.m) và S-curve

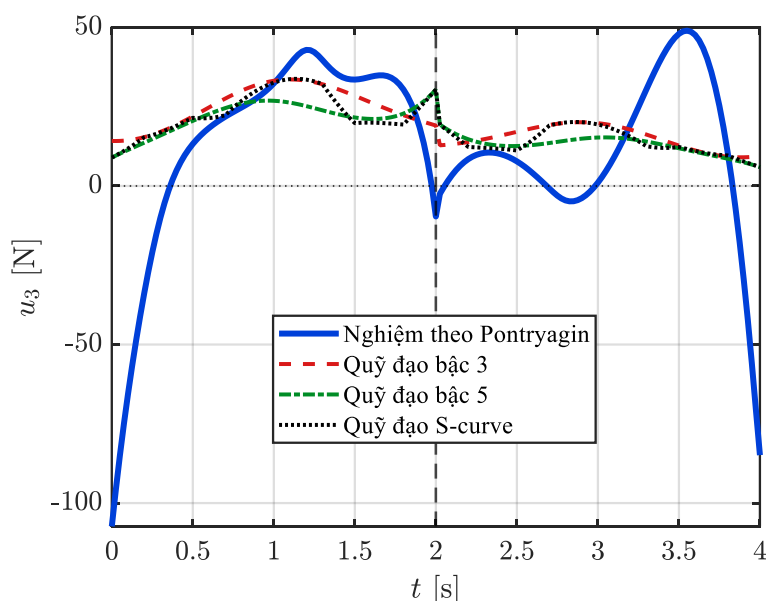
(khoảng 162,236 N.m). Như vậy, biên độ cực đại của  $u_1$  được giảm khoảng 18,6% đến 24%, đặc biệt đồ thị  $u_1$  cho thấy mômen ứng với nghiệm Pontryagin có độ lớn nhỏ hơn các quy luật đối chứng trong phần lớn thời gian chuyển động. Các mômen  $u_2$  và lực  $u_3$  của nghiệm Pontryagin tuy có độ lớn cực đại lớn hơn so với các quy luật chuyển động đối chứng, nhưng đỉnh cực đại duy trì trong thời gian ngắn, dẫn tới kết quả giá trị hàm mục tiêu của nghiệm Pontryagin đạt nhỏ hơn.



Hình 3.21. Đồ thị mômen  $u_1$  của các quy luật chuyển động



Hình 3.22. Đồ thị mômen  $u_2$  của các quy luật chuyển động



Hình 3.23. Đồ thị mômen  $u_3$  của các quy luật chuyển động

Bảng 3.2. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động điểm-điểm theo chu trình

Quy luật chuyển động	Giá trị hàm mục tiêu $J$			Mức giảm của nghiệm tối ưu so với các quy luật đối chứng trong toàn bộ chu trình
	Pha đi	Pha về	Chu trình	
Tối ưu theo Pontryagin	6089,07	2960,65	9049,72	
Đa thức bậc ba	11899,96	6050,73	17950,68	49,59%
Đa thức bậc năm	12704,80	6429,21	19134,01	52,70%
S-curve	12423,91	6297,60	18721,51	51,66%

Theo **Bảng 3.2**, nghiệm tối ưu theo Pontryagin đều cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ nhất ở cả pha đi, pha về và toàn bộ chu trình. Ở pha đi, giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tối ưu là 6089,07, giảm lần lượt 48,83%; 52,07% và 50,99% so với các quy luật đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve. Ở pha về, giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tối ưu là 2960,65, giảm tương ứng 51,07%; 53,95% và 52,99% so với ba quy luật đối chứng. Xét toàn bộ chu trình, nghiệm

tối ưu đạt  $J = 9049,72$ , thấp hơn 49,59%; 52,70% và 51,66% so với các quy luật đối chứng. Kết quả này cho thấy ưu thế của nghiệm tối ưu không chỉ xuất hiện ở tổng chu trình mà được duy trì trong từng pha chuyển động.

Với cùng điều kiện biên, cùng thời gian chuyển động, cùng mô hình động lực học và cùng trạng thái tải trọng tương ứng ở từng pha, nghiệm Pontryagin cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn đáng kể so với các quy luật chuyển động đặt trước. Điều này góp phần khẳng định khả năng áp dụng của phương pháp điều khiển tối ưu trong việc giảm nỗ lực điều khiển cho chuyển động chu trình của tay máy công nghiệp.

### **Kết luận chương 3**

Từ nội dung chương 3 có thể rút ra các kết luận sau:

1- Khung phương pháp nghiên cứu đã xây dựng ở Chương 2 có thể áp dụng hiệu quả cho bài toán điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp trong chuyển động điểm-điểm. Trên cơ sở mô hình động lực học thiết lập bằng phương pháp ma trận truyền và phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận, bài toán tối ưu đã được phát biểu phù hợp cho hai trường hợp nghiên cứu cụ thể là tay máy robot đến điểm đích và tay máy robot theo chu trình.

2- Việc áp dụng nguyên lý cực đại Pontryagin cho phép chuyển các bài toán điều khiển tối ưu đã xét về dạng hệ phương trình vi phân biên hai điểm, trong đó các biến trạng thái, biến liên hợp và luật điều khiển tối ưu được xác định đồng thời. Kết quả này cho thấy hướng tiếp cận của luận án không chỉ phù hợp với bài toán chuyển động đến điểm đích, mà còn có thể mở rộng cho bài toán chuyển động theo chu trình gồm nhiều giai đoạn liên tiếp với điều kiện biên chuyển tiếp giữa các giai đoạn. Đối với bài toán theo chu trình, việc bổ sung điều kiện vận tốc bằng không tại điểm đổi pha giúp tránh bước nhảy vận tốc giữa pha đi và pha về, làm cho chuyển động khứ hồi phù hợp hơn với các thao tác công nghiệp có tính lặp lại.

3- Các kết quả mô phỏng số cho thấy nghiệm tối ưu thu được đều bảo đảm tay máy thực hiện đúng yêu cầu chuyển động, đồng thời các biến khớp, vận tốc khớp và mômen điều khiển biến thiên liên tục. Việc so sánh định lượng tiêu chí

tối ưu với các quy luật chuyển động đối xứng gồm đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve đã được thực hiện. Đối với bài toán chuyển động đến điểm đích, nghiệm tối ưu làm giảm giá trị hàm mục tiêu lần lượt 48,83%; 52,07% và 50,99% so với các quy luật đối xứng. Đối với bài toán chuyển động điểm-điểm theo chu trình, giá trị hàm mục tiêu toàn chu trình giảm lần lượt 49,59%; 52,70% và 51,66%. Các kết quả này khẳng định hiệu quả của phương pháp điều khiển tối ưu theo nguyên lý Pontryagin đối với tiêu chí giảm nỗ lực điều khiển đã lựa chọn.

## **CHƯƠNG 4. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TAY MÁY CÔNG NGHIỆP CHỊU RÀNG BUỘC QUỸ ĐẠO ĐIỂM CUỐI**

Trong Chương 3, luận án đã khảo sát bài toán điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp trong chuyển động điểm-điểm, trong đó điểm tác động cuối di chuyển từ vị trí đầu đến vị trí cuối theo yêu cầu mà không bị ràng buộc bởi một quỹ đạo hình học định trước. Trên cơ sở mô hình động lực học của tay máy và nguyên lý cực đại Pontryagin, các bài toán điều khiển tối ưu tay máy robot đến điểm đích và theo chu trình đã được thiết lập. Đây là cơ sở trực tiếp để tiếp tục phát triển sang lớp bài toán có mức độ phức tạp cao hơn, đó là bài toán điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối.

Trong nhiều ứng dụng công nghiệp như hàn, sơn, gia công hoặc thao tác, điểm tác động cuối của tay máy không được phép chuyển động tự do mà phải bám theo một quỹ đạo công nghệ đã xác định trước. Khi đó, bài toán điều khiển tối ưu không chỉ đòi hỏi tay máy thỏa mãn các điều kiện đầu và điều kiện cuối, mà còn phải bảo đảm điểm cuối luôn nằm trên quỹ đạo ràng buộc trong suốt quá trình chuyển động. Vì vậy, đây là bài toán điều khiển tối ưu của hệ cơ học chịu ràng buộc, trong đó việc thiết lập phương trình chuyển động cần dựa trên nguyên lý phù hợp kết hợp với phương pháp ma trận truyền, sau đó mới áp dụng nguyên lý cực đại Pontryagin để xác định luật điều khiển tối ưu.

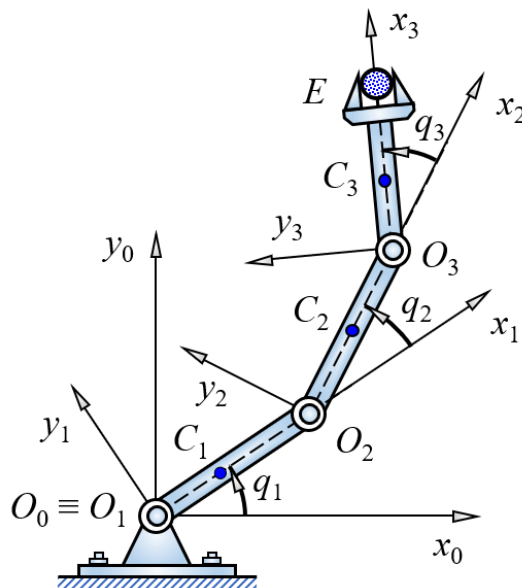
Mục tiêu của chương 4 là thiết lập và giải bài toán điều khiển tối ưu cho tay máy công nghiệp khi điểm tác động cuối chịu ràng buộc quỹ đạo cho trước; xác định quy luật chuyển động và lực/mômen điều khiển tương ứng; đồng thời đánh giá kết quả mô phỏng theo tiêu chí tối ưu nỗ lực điều khiển. Các kết quả trong chương này cho phép mở rộng khung phương pháp đã áp dụng cho chuyển động điểm-điểm ở Chương 3 sang lớp bài toán có ràng buộc quỹ đạo điểm cuối.

## 4.1. Điều khiển tối ưu tay máy chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối

### 4.1.1. Đặt bài toán

Xét tay máy phẳng ba khâu quay (RRR) trong mặt phẳng thẳng đứng như trên *Hình 4.1* được mô hình hóa với các tham số động học, động lực học như sau:

- Các khâu của tay máy là các thanh mảnh đồng chất, chiều dài  $L_1 = O_1O_2$ ;  $L_2 = O_2O_3$ ;  $L_3 = O_3E$  với  $E$  là điểm tác động cuối;
- Khối lượng khâu thứ  $i$  của tay máy là  $m_i$  với  $i = 1, 2, 3$ ;
- Khối tâm của khâu thứ  $i$  là  $C_i$  tại các vị trí  $O_1C_1 = c_1$ ;  $O_2C_2 = c_2$  và  $O_3C_3 = c_3$ ;
- Mômen quán tính của khâu thứ  $i$  đối với khối tâm khâu thứ  $i$  là  $J_i$  với  $i = 1, 2, 3$ ;
- Vectơ tọa độ suy rộng của tay máy được chọn là  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$  ứng với các góc quay tại các khớp;
- Tay máy di chuyển một tải trọng khối lượng  $m$  ở điểm cuối  $E$ , coi như là một chất điểm tại đầu mút của khâu 3.



Hình 4.1. Tay máy phẳng ba khâu quay (RRR)

Bài toán đặt ra là tối ưu nỗ lực điều khiển của tay máy thông qua xác định các lực/mômen dẫn động tối ưu tại các khớp (biến điều khiển) để điểm cuối  $E$  với toạ độ  $(x_E, y_E)$  trong hệ toạ độ  $O_0x_0y_0$  di chuyển trong mặt phẳng thẳng đứng theo quỹ đạo cho trước là một đường thẳng có phương trình

$$G \triangleq y_E + ax_E - b = 0 \quad (3.16)$$

với  $a, b$  là các hệ số cho trước. Như vậy, bài toán đang xét là bài toán điều khiển tối ưu của một hệ cơ học chịu ràng buộc hình học, trong đó ràng buộc được áp đặt trực tiếp lên chuyển động của điểm tác động cuối.

Các mômen dẫn động tại các khớp được chọn làm biến điều khiển của hệ:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Trong bài toán này, tiêu chuẩn tối ưu được lựa chọn theo hướng tối ưu hóa nỗ lực điều khiển của tay máy thông qua việc làm nhỏ tác động điều khiển tại các khớp. Theo đó, bài toán cần giải là xác định luật điều khiển tối ưu để điểm cuối của tay máy vừa bám chính xác quỹ đạo định sẵn, vừa bảo đảm chi phí điều khiển là nhỏ nhất. Về mặt phương pháp, bài toán được xử lý theo hai bước. Trước hết, sử dụng phương pháp ma trận truyền kết hợp với nguyên lý phù hợp để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của tay máy chịu ràng buộc. Sau đó, xây dựng hàm Hamilton và áp dụng nguyên lý cực đại Pontryagin để xác định các điều kiện cần tối ưu, từ đó đưa bài toán về dạng bài toán giá trị biên hai điểm.

#### 4.1.2. Thiết lập phương trình động lực học tay máy chịu ràng buộc

Các hệ toạ độ được đặt như trong *Hình 4.1*. Sử dụng phương pháp ma trận truyền, các ma trận truyền biểu diễn phép biến đổi giữa các hệ toạ độ là

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{T}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & L_1 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & L_2 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tọa độ khối tâm các khâu trong hệ tọa độ gắn liền khâu là:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_1}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_2}^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_3}^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tọa độ điểm cuối  $E$  là:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E^{(0)} \\ y_E^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Với:

$$x_E^{(0)} = L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$y_E^{(0)} = L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

Tay máy đang khảo sát thực hiện chuyển động theo quỹ đạo cho trước trong mặt phẳng thẳng đứng, vectơ gia tốc trọng trường hướng từ trên xuống dưới.

Các thành phần của ma trận quán tính  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  được xác định như sau:

$$a_{11} = m_1 \mathbf{r}_1^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_{11}^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r} + J_1 + J_2 + J_3$$

$$= m_1 c_1^2 + m_2 (c_2^2 + L_1^2 + 2c_2 L_1 \cos q_2) + m_3 [L_1^2 + L_2^2 + c_3^2 + 2L_1 L_2 \cos q_2 + 2c_3 (L_1 \cos(q_2 + q_3) + L_2 \cos q_3)] + m [L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + 2L_1 L_2 \cos q_2 + 2L_2 L_3 \cos q_3 + 2L_1 L_3 \cos(q_2 + q_3)] + J_1 + J_2 + J_3$$

$$a_{12} = m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r} + J_1 + J_2$$

$$= m_2 (c_2^2 + c_2 L_1 \cos q_2) + m_3 [L_2^2 + c_3^2 + 2c_3 L_2 \cos q_3 + 2c_3 L_1 \cos(q_2 + q_3) + L_2 L_2 \cos q_2] + m [L_2^2 + L_3^2 + L_1 L_2 \cos q_2 + 2L_2 L_3 \cos q_3 + L_1 L_3 \cos(q_2 + q_3)] + J_2 + J_3$$

$$a_{13} = m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{11} \mathbf{r} + J_3$$

$$= m_3 [c_3^2 + L_2 c_3 \cos q_3 + L_1 c_3 \cos(q_2 + q_3)] + m [L_3^2 + L_2 L_3 \cos q_3 + L_1 L_3 \cos(q_2 + q_3)] + J_3$$

$$a_{22} = m_2 \mathbf{r}_2^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_3^T \mathbf{t}_{21}^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{r} + J_2 + J_3$$

$$= m_2 c_2^2 + m_3 (L_2^2 + c_3^2 + 2L_2 L_3 \cos q_3) + m (L_3^2 + L_2^2 + 2L_2 L_3 \cos q_3) + J_2 + J_3$$

$$a_{23} = m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{21} \mathbf{r} + J_3$$

$$= m_3 (L_2 c_3 \cos q_3 + c_3^2) + m (L_2 L_3 \cos q_3 + L_3^2) + J_3$$

$$a_{33} = m_3 \mathbf{r}_3^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{31} \mathbf{r}_3 + m \mathbf{r}^T \mathbf{t}_{31}^T \mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_{31} \mathbf{r} + J_3$$

$$= m_3 c_3^2 + m L_3^2 + J_3$$

Chú ý rằng, các hệ số  $a_{21} = a_{12}$ ,  $a_{31} = a_{13}$ ,  $a_{32} = a_{23}$  do tính chất đối xứng của ma trận quán tính  $\mathbf{A}$  và các ma trận đạo hàm  $\mathbf{t}_{i1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  tính như sau

$$\mathbf{t}_{11} = \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{t}_{21} = \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial q_2} = \begin{bmatrix} -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{t}_{31} = \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tay máy chịu lực cản nhớt tại các khớp được cho bởi:

$$\mathbf{F}_c = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Trong đó  $\mathbf{B}$  là ma trận đường chéo chứa các hệ số cản nhớt.

Thế năng của tay máy được xác định như sau:

$$\Pi = -\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{C_i}^{(0)} - m \mathbf{g}^T \mathbf{r}_E^{(0)}$$

Với:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{r}_{C_1}^{(0)} = [c_1 \cos q_1 \quad c_1 \sin q_1]^T;$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_2}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_2}^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}_{C_2}^{(0)} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + c_2 \cos(q_1 + q_2) \\ L_1 \sin q_1 + c_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_3}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{C_3}^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}_{C_3}^{(0)} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) + c_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2) + c_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix}.$$

Từ đó ta tính được:

$$\Pi = g[m_1 c_1 \sin q_1 + (m_2 + m_3 + m)L_1 \sin q_1 + (m_2 c_2 + m_3 c_3 + mL_3) \sin(q_1 + q_2) + (m_3 c_3 + mL_3) \sin(q_1 + q_2 + q_3)]$$

Lực suy rộng của các lực hoạt động  $\mathbf{Q}$  tính được như sau:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u} - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

Với:

$$Q_1 = u_1 - b_1 \dot{q}_1 - [m_1 c_1 + (m_2 + m_3 + m)gL_1] \cos q_1 \\ - (m_2 c_2 + m_3 L_3 + mL_3)g \cos(q_1 + q_2) - (m_3 c_3 + mL_3)g \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$Q_2 = u_2 - b_2 \dot{q}_2 \\ - (m_2 c_2 + m_3 L_3 + mL_3)g \cos(q_1 + q_2) - (m_3 c_3 + mL_3)g \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$Q_3 = u_3 - b_3 \dot{q}_3 - (m_3 c_3 + mL_3)g \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

Để tính lực suy rộng của các lực quán tính  $\mathbf{Q}_{qt} = [Q_1^{qt} \quad Q_2^{qt} \quad Q_3^{qt}]^T$ , ta

xây dựng các ma trận sau đây:

$$\partial_1 \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{32}}{\partial q_1} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_1} \end{bmatrix}; \quad \partial_2 \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{32}}{\partial q_2} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_2} \end{bmatrix};$$

$$\partial_3 \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{13}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{23}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{32}}{\partial q_3} & \frac{\partial a_{33}}{\partial q_3} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}_3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có:

$$\mathbf{Q}_{qt} = \mathbf{Q}_{qt1} - \mathbf{Q}_{qt2} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}}^T \partial_1 \mathbf{A} \quad \dot{\mathbf{q}}^T \partial_2 \mathbf{A} \quad \dot{\mathbf{q}}^T \partial_3 \mathbf{A}]^T \dot{\mathbf{q}} - \sum_{i=1}^3 \partial_i \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i$$

Kết quả lực suy rộng của các lực quán tính:

$$\begin{aligned}
Q_1^{qt} = & \left[ (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) L_1 \dot{q}_2 c_2 \sin q_2 \right] m_2 \\
& + \left[ c_3 L_1 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 + \dot{q}_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_3 + q_2) \right. \\
& \quad \left. + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) L_1 \dot{q}_2 L_2 \sin q_2 + \dot{q}_3 c_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) L_2 \sin q_3 \right] m_3 \\
& + \left[ L_1 L_3 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 + \dot{q}_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_3 + q_2) \right. \\
& \quad \left. + \dot{q}_3 L_3 (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) L_2 \sin q_3 \right] m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2^{qt} = & (-L_1^2 c_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2) m_2 \\
& + \left[ -L_1^2 c_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_3 + q_2) + c_3 (2\dot{q}_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3) L_2 \sin q_3 - L_1^2 L_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \right] m_3 \\
& + \left[ -L_1^2 L_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_3 + q_2) + L_3 (2\dot{q}_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3) L_2 \sin q_3 - L_1^2 L_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \right] m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3^{qt} = & \left[ -L_1 L_3 c_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_3 + q_2) + (-L_1 c_3 \dot{q}_1^2 - 2c_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1 - L_1 c_3 \dot{q}_2^2) L_2 \sin q_3 \right] m_3 \\
& + \left[ -L_1 L_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_3 + q_2) + (-L_1 L_3 \dot{q}_1^2 - 2L_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1 - L_1 L_3 \dot{q}_2^2) L_2 \sin q_3 \right] m
\end{aligned}$$

Thay  $\mathbf{r}_E^{(0)}$  vào phương trình (3.16), ta được phương trình sau:

$$\begin{aligned}
G \triangleq & a \left[ L_1 \cos q_1 + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \right] - b \\
& + L_1 \sin q_1 + L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Đạo hàm theo thời gian của  $G$  ta được:

$$\begin{aligned}
G_1 \triangleq \frac{dG}{dt} = & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 d_i \dot{q}_i = 0 \\
d_i = & \frac{\partial G}{\partial q_i}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Coi  $q_1, q_2$  là các tọa độ suy rộng độc lập, biểu diễn các vận tốc suy rộng theo  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ , kết hợp với phương trình (3.19) như sau:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 = & 1 \cdot \dot{q}_1 + 0 \cdot \dot{q}_2 \\
\dot{q}_2 = & 0 \cdot \dot{q}_1 + 1 \cdot \dot{q}_2 \\
\dot{q}_3 = & -\frac{d_1}{d_3} \dot{q}_1 - \frac{d_2}{d_3} \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Viết lại hệ phương trình (3.20) dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_1}{d_3} \\ 0 & 1 & -\frac{d_2}{d_3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Từ đó ta được ma trận  $\mathbf{D}$  như sau:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_1}{d_3} \\ 0 & 1 & -\frac{d_2}{d_3} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

trong đó

$$d_1 = \frac{\partial G}{\partial q_1} = -a \left[ L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_1 \sin q_1 \right] \\ + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_1 \cos q_1$$

$$d_2 = \frac{\partial G}{\partial q_2} = -a \left[ L_2 \sin(q_1 + q_2) + L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \right] \\ + L_2 \cos(q_1 + q_2) + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$d_3 = \frac{\partial G}{\partial q_3} = -a L_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + L_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

Ta có thể viết lại hệ phương trình vi phân chuyển động của tay máy robot từ phương trình dạng ma trận (2.13) như sau:

$$\begin{cases} d_3 \cdot G_1 - d_1 \cdot G_3 = 0 \\ d_3 \cdot G_2 - d_2 \cdot G_3 = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

trong đó:

$$\begin{cases} G_1 \triangleq a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + a_{13}\ddot{q}_3 - Q_1 - Q_1^{qt} = 0 \\ G_2 \triangleq a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + a_{23}\ddot{q}_3 - Q_2 - Q_2^{qt} = 0 \\ G_3 \triangleq a_{31}\ddot{q}_1 + a_{32}\ddot{q}_2 + a_{33}\ddot{q}_3 - Q_3 - Q_3^{qt} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Ngoài ra, đạo hàm bậc hai của phương trình liên kết (3.16) ta được:

$$\sum_{i=1}^3 d_i \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial d_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i = 0 \quad (3.25)$$

Kết hợp hệ phương trình (3.23) và (3.25) sẽ giải được các gia tốc suy rộng  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$  là hàm của các đại lượng  $\{q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, u_1, u_2, u_3, \dots\}$ , phục vụ cho bài toán điều khiển tối ưu ở phần sau.

#### 4.1.3. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu

Yêu cầu đặt ra là xác định biến điều khiển  $\mathbf{u}(t)$  và quỹ đạo góc khớp  $\mathbf{q}(t)$  tương ứng để điểm cuối của tay máy di chuyển từ vị trí đầu  $M_0(x_0, y_0)$  tương ứng với góc khớp  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ , theo đường dịch chuyển thẳng ứng với phương trình (3.16), đến vị trí đích  $M_f(x_f, y_f)$  với góc khớp  $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$ , trong đó  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f, t_f$  cho trước, và thỏa mãn tiêu chí tối ưu như sau

$$J = \int_0^{t_f} f_0 dt \rightarrow \min \quad (3.26)$$

với

$$f_0 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (3.27)$$

Xác định hàm Hamilton có dạng như biểu thức (3.5). Chuyển động của tay máy được mô tả bởi một hệ gồm 12 phương trình vi phân cấp một đối với sáu biến trạng thái (3.7) và sáu biến liên hợp (3.8), kết hợp với điều kiện tối ưu (3.9). Giải hệ phương trình vi phân này với các điều kiện biên sẽ thu được nghiệm tối ưu cần tìm.

#### 4.1.4. Kết quả mô phỏng số

##### a) Thiết lập mô phỏng

Thực hiện mô phỏng tính toán với các tham số được chọn như sau:

$$m_1 = 4,2; m_2 = 3,0; m_3 = 2,88; m_d = 1,5 \text{ [kg]}$$

$$L_1 = 0,8; L_2 = 0,6; L_3 = 0,5 \text{ [m]}$$

$$c_1 = 0,4; c_2 = 0,3; c_3 = 0,25 \text{ [m]}$$

$$J_1 = 0,224; J_2 = 0,09; J_3 = 0,06 \text{ [kg.m}^2\text{]}$$

$$b_1 = 3; b_2 = 5; b_3 = 5 \text{ [N.m.s/rad]}$$

$$g = 10 \text{ [m/s}^2\text{]}; t_f = 2 \text{ [s]}$$

Điều kiện biên được chọn như sau:

$$q_1(0) = 0 \text{ [rad]}; q_2(0) = \frac{\pi}{6} \text{ [rad]}; q_3(0) = \frac{\pi}{6} \text{ [rad]}$$

$$q_1(t_f) = -\frac{\pi}{6} \text{ [rad]}; q_2(t_f) = \frac{2\pi}{3} \text{ [rad]}; q_3(t_f) = -\frac{\pi}{3} \text{ [rad]};$$

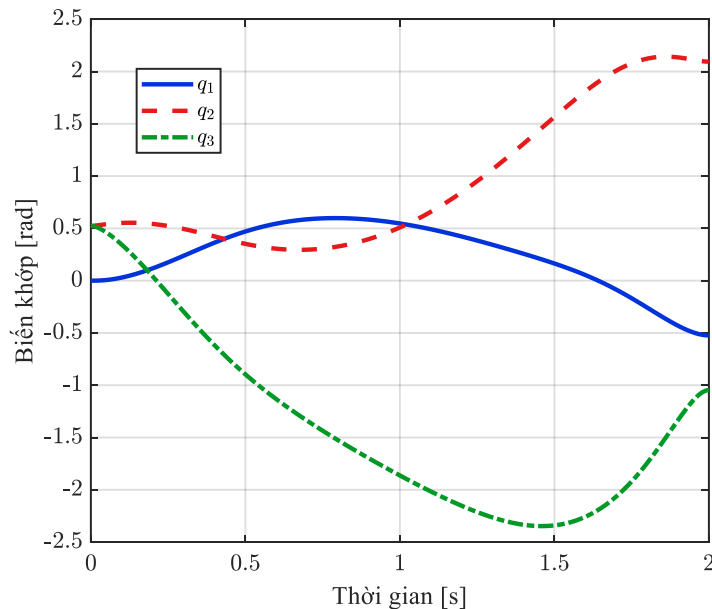
$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0$$

$$\dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = \dot{q}_3(t_f) = 0$$

Phiếm hàm mục tiêu tích lũy:  $z = \int_0^t f_0 dt$ ;  $z(0) = 0$ .

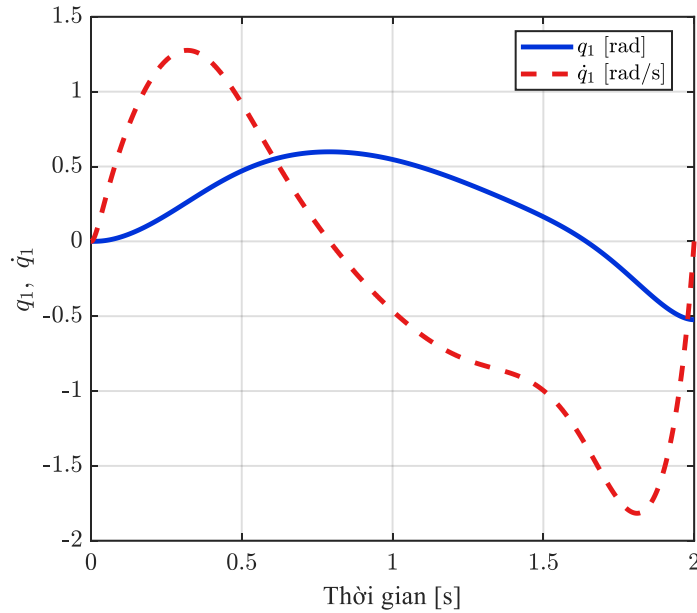
### b) Kết quả mô phỏng

Các đồ thị của các đại lượng thu được từ mô phỏng số được thể hiện từ *Hình 4.2* đến *Hình 4.8*.

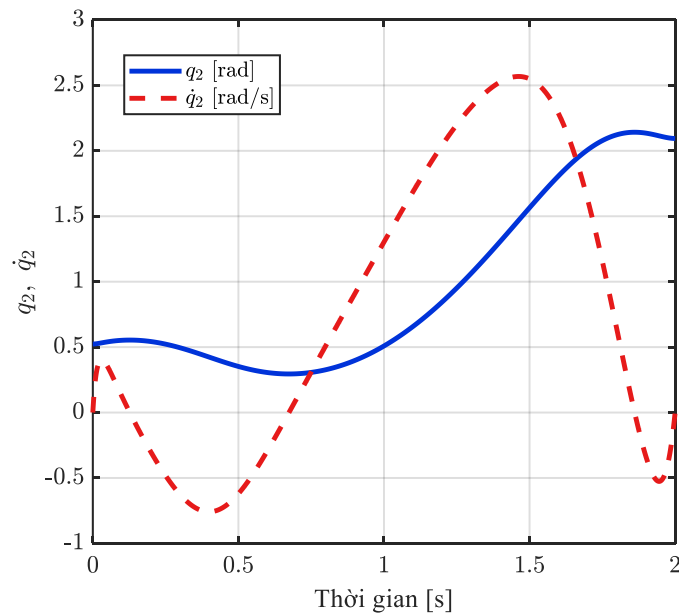


*Hình 4.2. Đồ thị các biến khớp*

Trên *Hình 4.2*, các biến khớp biến thiên liên tục theo thời gian, không xuất hiện bước nhảy hoặc dao động bất thường. Điều này cho thấy nghiệm số của bài toán điều khiển tối ưu là phù hợp về mặt động học và bảo đảm tính khả thi của chuyển động trong khoảng thời gian khảo sát.



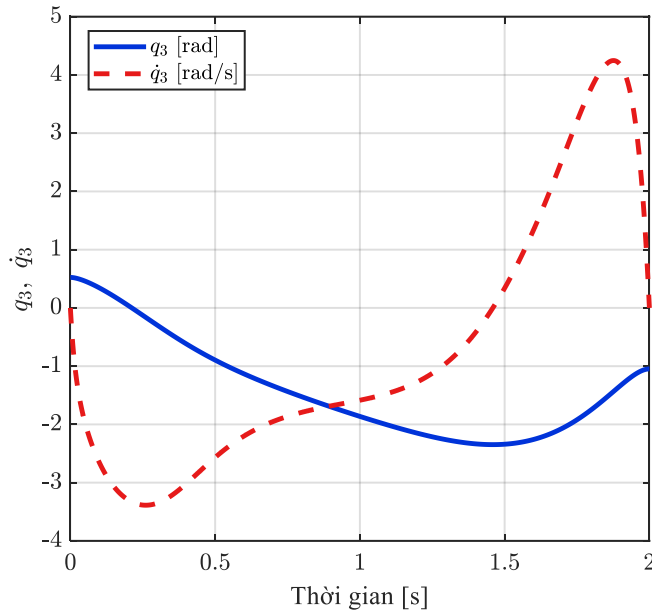
*Hình 4.3. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 1*



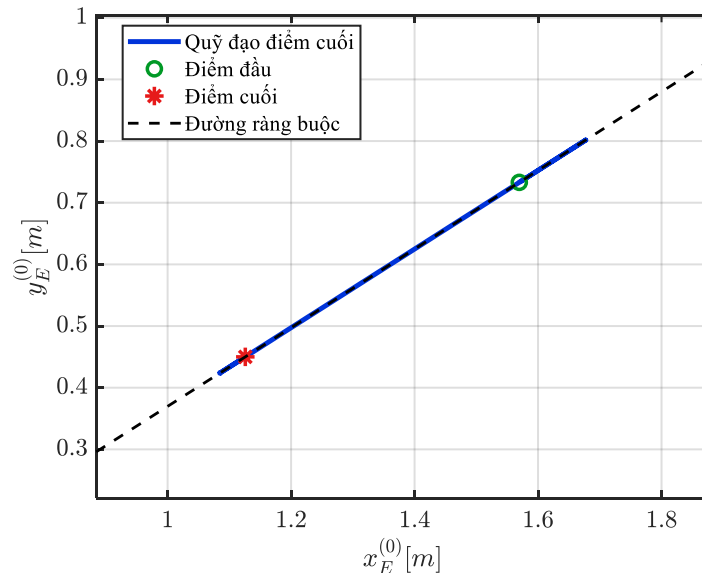
*Hình 4.4. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 2*

Các *Hình 4.3*, *Hình 4.4* và *Hình 4.5* thể hiện chi tiết quy luật biến khớp và vận tốc khớp tương ứng. Có thể thấy vận tốc của các khớp đều bằng không tại

thời điểm đầu và thời điểm cuối, phù hợp với điều kiện biên đã đặt ra. Trong khoảng thời gian chuyển động, vận tốc các khớp biến thiên liên tục, không có sự thay đổi đột ngột. Các kết quả này cho thấy chuyển động thu được có độ trơn cần thiết, phù hợp với yêu cầu vận hành của cơ cấu tay máy.



Hình 4.5. Đồ thị biến khớp và vận tốc khớp khâu 3

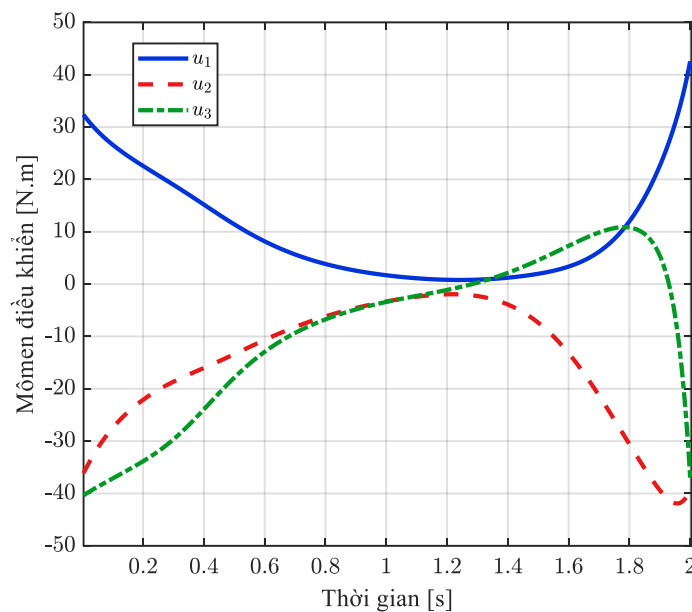


Hình 4.6. Đồ thị quỹ đạo chuyển động điểm cuối

**Hình 4.6** biểu diễn quỹ đạo chuyển động của điểm tác động cuối trong mặt phẳng thao tác. Kết quả cho thấy điểm cuối của tay máy di chuyển từ điểm đầu

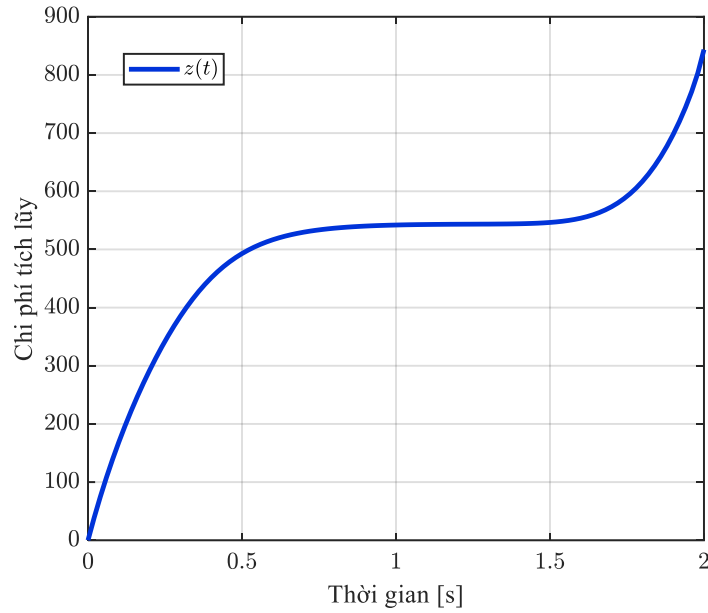
đến điểm cuối và bám theo đường ràng buộc hình học đã đặt ra. Quỹ đạo hình học nằm trên đường ràng buộc, chứng tỏ phương pháp xây dựng mô hình động lực học có ràng buộc và bài toán điều khiển tối ưu đã bảo đảm được yêu cầu chuyển động của điểm tác động cuối.

**Hình 4.7** thể hiện các lực và mômen điều khiển tại các khớp. Các tín hiệu điều khiển  $u_1, u_2, u_3$  biến thiên liên tục trong toàn bộ quá trình mô phỏng. Nhìn chung, các tín hiệu điều khiển không xuất hiện dao động đột biến, cho thấy nghiệm điều khiển thu được có tính ổn định.



*Hình 4.7. Đồ thị các lực/mômen điều khiển*

**Hình 4.8** biểu diễn giá trị tích lũy của hàm mục tiêu theo thời gian. Đường cong  $z(t)$  tăng đơn điệu từ giá trị ban đầu  $z(0) = 0$ , phù hợp với bản chất của hàm mục tiêu dạng tích phân bình phương lực/mômen điều khiển. Giá trị hàm mục tiêu tăng nhanh ở giai đoạn đầu, sau đó tăng chậm hơn ở khoảng giữa quá trình và tiếp tục tăng mạnh hơn ở giai đoạn cuối. Điều này phù hợp với diễn biến của các lực/mômen điều khiển trên **Hình 4.7**, đặc biệt là khi các khớp phải điều chỉnh để bảo đảm đồng thời điều kiện cuối và ràng buộc quỹ đạo. Giá trị cuối của hàm mục tiêu phản ánh tổng chi phí điều khiển cần thiết để tay máy hoàn thành chuyển động trong điều kiện ràng buộc đã cho.



Hình 4.8. Đồ thị hàm mục tiêu

Các kết quả mô phỏng đã cho thấy phương pháp đề xuất hiệu quả trong việc điều khiển tối ưu tay máy robot trong chuyển động với quỹ đạo định sẵn.

#### 4.1.5. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng

Để đánh giá hiệu quả của nghiệm điều khiển tối ưu thu được từ nguyên lý cực đại Pontryagin, trong mục này tiến hành so sánh giá trị hàm mục tiêu với một số quy luật chuyển động đối chứng. Các quy luật đối chứng được lựa chọn gồm: quy luật đa thức bậc ba, quy luật đa thức bậc năm và quy luật S-curve.

Khác với bài toán chuyển động điểm-điểm trong không gian khớp, ở bài toán đang xét, điểm tác động cuối của tay máy phải chuyển động trên đường ràng buộc hình học đã cho. Vì vậy, các quy luật đối chứng không được xây dựng độc lập cho từng biến khớp, mà được xây dựng thông qua tham số chuyển động dọc theo quỹ đạo điểm cuối.

Gọi  $\varphi(t)$  là tham số dịch chuyển dọc theo quỹ đạo ràng buộc của điểm tác động cuối,  $L$  là chiều dài đoạn quỹ đạo từ điểm đầu đến điểm cuối. Đặt tham số chuẩn hóa:

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{L}, \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (3.28)$$

Khi đó, quy luật chuyển động của điểm tác động cuối được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E(0) \\ y_E(0) \end{bmatrix} + \psi \left( \begin{bmatrix} x_E(t_f) \\ y_E(t_f) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_E(0) \\ y_E(0) \end{bmatrix} \right) \quad (3.29)$$

trong đó  $\begin{bmatrix} x_E(0) & y_E(0) \end{bmatrix}^T$ ,  $\begin{bmatrix} x_E(t_f) & y_E(t_f) \end{bmatrix}^T$  lần lượt là vị trí tại thời điểm ban đầu và thời điểm cuối của điểm tác động cuối.

Để xây dựng quy luật tham số  $\psi(t)$  theo các quy luật chuyển động đối chứng, ta đặt:

$$\tau = \frac{t}{t_f}, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (3.30)$$

Đối với quy luật đa thức bậc ba, tham số chuyển động dọc quỹ đạo được chọn theo dạng:

$$\psi(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 \quad (3.31)$$

với các điều kiện:

$$\psi(0) = 0; \quad \psi(1) = 1; \quad \frac{d\psi}{d\tau}(0) = \frac{d\psi}{d\tau}(1) = 0 \quad (3.32)$$

Đối với quy luật đa thức bậc năm, ngoài các điều kiện về vị trí và vận tốc, gia tốc của tham số chuyển động tại thời điểm đầu và cuối cũng được chọn bằng không, tức là:

$$\psi(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5 \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}(0) = \frac{d^2\psi}{d\tau^2}(1) = 0 \quad (3.34)$$

Đối với quy luật S-curve 7 pha, chuyển động của tham số  $\psi$  được chọn ở dạng đối xứng. Đặt  $T_j = 0,2[s]$  là thời gian của mỗi pha có độ gập khác không,  $T_a = 0,3[s]$  là thời gian của mỗi pha giữ gia tốc không đổi và  $T_v = 0,6[s]$  là thời

gian của pha vận tốc không đổi. Giá trị giới hạn của độ giạt trong quy luật S-curve được xác định từ điều kiện dịch chuyển  $\Delta\psi = 1$  như sau:

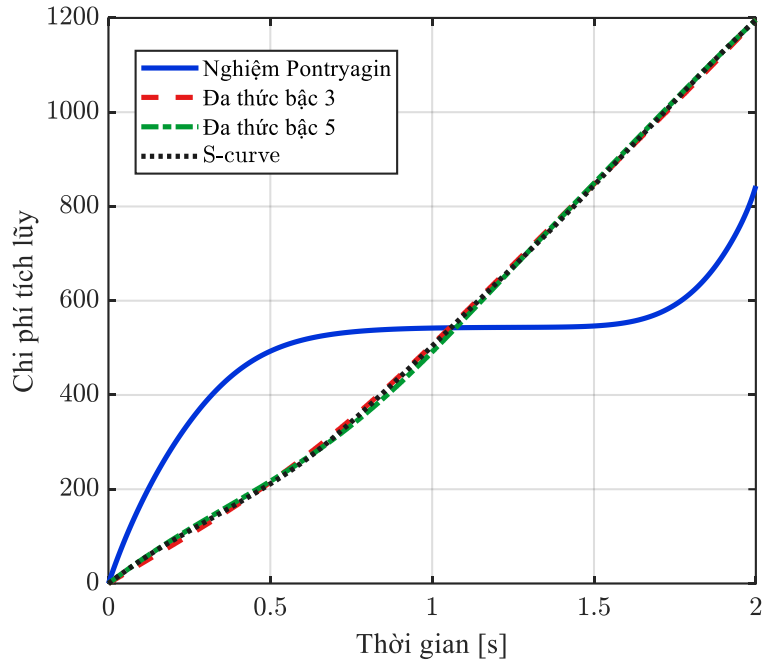
$$J_m = \frac{1}{T_j \left[ 2T_j^2 + 3T_j T_a + T_a^2 + T_v (T_j + T_a) \right]} \quad (3.35)$$

Do tay máy có ba biến khớp trong khi vị trí điểm tác động cuối trong mặt phẳng được xác định bởi hai tọa độ, nên khi chỉ ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, hệ còn một biến độc lập. Để xác định đầy đủ chuyển động của tay máy, biến độc lập  $q_1$  được chọn biến thiên theo cùng tham số  $\psi$  như sau:

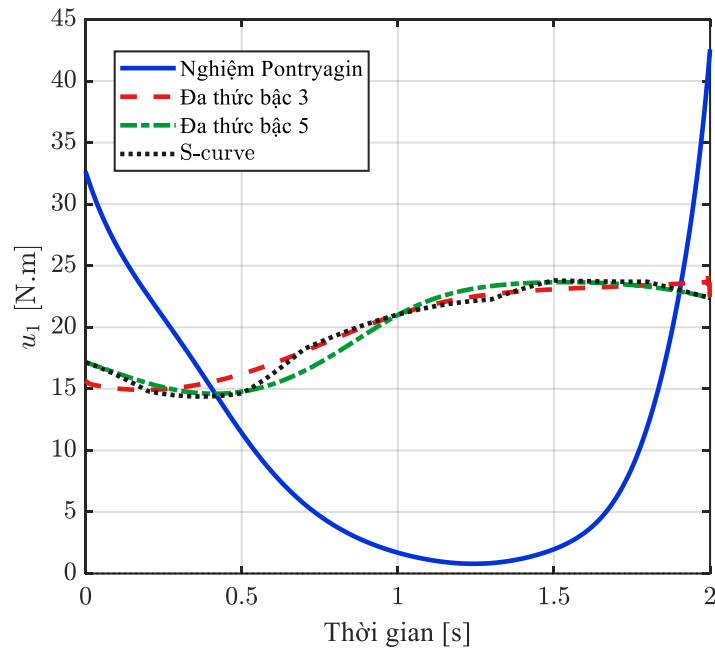
$$q_1(\psi) = q_1(0) + \psi \left[ q_1(t_f) - q_1(0) \right] \quad (3.36)$$

Các biến khớp  $q_2, q_3$  sẽ được xác định thông qua bài toán động học ngược. Từ các đại lượng  $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$ , các lực/mômen điều khiển tương ứng được xác định bằng phương trình động lực học ngược. Cách xây dựng này bảo đảm các quy luật đối chứng có cùng điểm đầu, điểm cuối, cùng thời gian chuyển động và cùng đường ràng buộc hình học của điểm tác động cuối với nghiệm tối ưu. Kết quả so sánh được thể hiện trên *Hình 4.9* đến *Hình 4.13* và *Bảng 4.1*.

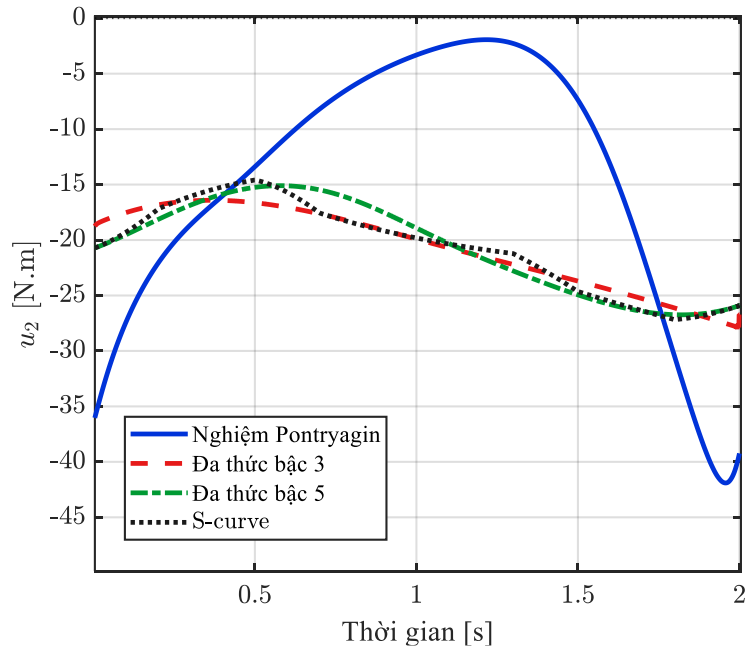
*Hình 4.9* biểu diễn sự biến thiên của hàm chi phí tích lũy theo thời gian đối với nghiệm tối ưu theo Pontryagin và ba quy luật chuyển động đối chứng. Có thể nhận thấy đường chi phí tích lũy của nghiệm Pontryagin nằm thấp hơn rõ rệt so với các quy luật đối chứng trong phần lớn quá trình chuyển động. Các quy luật đối chứng tuy được xây dựng để bảo đảm điểm tác động cuối chuyển động trên cùng đường ràng buộc, nhưng bản chất vẫn là các quy luật nội suy động học theo tham số quỹ đạo. Do đó, chúng chưa xét trực tiếp đến cấu trúc động lực học của tay máy trong quá trình xác định quy luật chuyển động. Ngược lại, nghiệm Pontryagin được xác định trên cơ sở mô hình động lực học và điều kiện cực trị của hàm Hamilton, nên có khả năng phân bố chuyển động và lực/mômen điều khiển hợp lý hơn theo tiêu chí hàm mục tiêu.



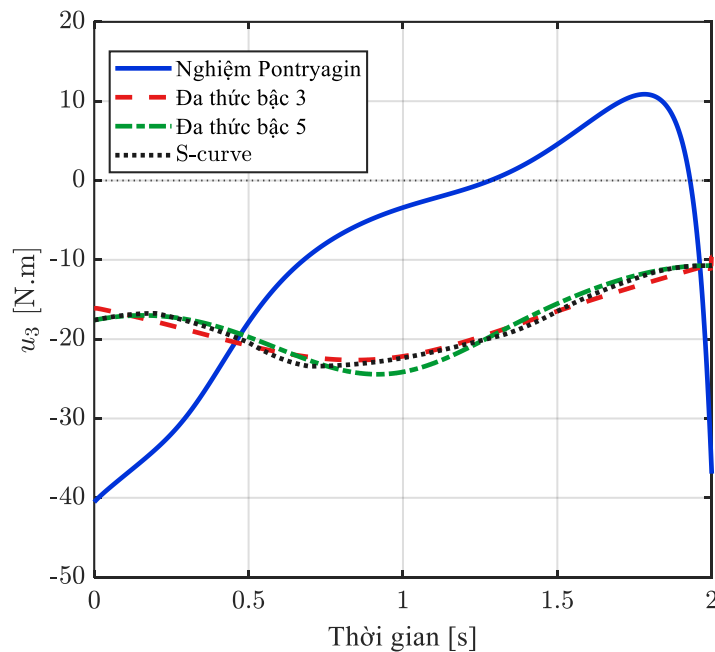
Hình 4.9. Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động



Hình 4.10. Đồ thị mômen  $u_1$  của các quy luật chuyển động



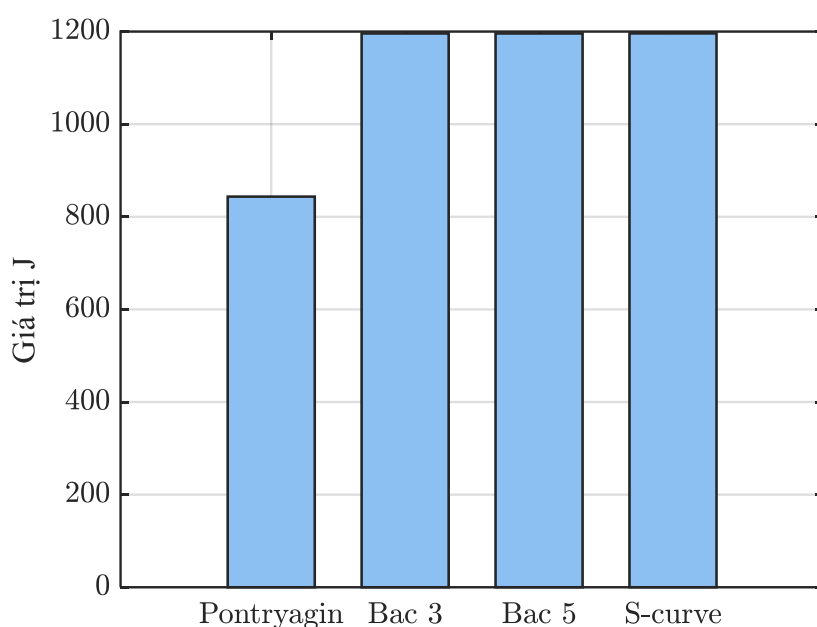
Hình 4.11. Đồ thị mômen  $u_2$  của các quy luật chuyển động



Hình 4.12. Đồ thị mômen  $u_3$  của các quy luật chuyển động

Các tín hiệu điều khiển của cả bốn phương pháp trên [Hình 4.10](#) đến [Hình 4.12](#) đều biến thiên trơn, không xuất hiện các đỉnh bất thường. Nghiệm Pontryagin có độ lớn mômen cực đại lớn hơn các quy luật đối chứng, nhưng giữ giá trị tức thời nhỏ hơn các quy luật đối chứng trên phần lớn thời gian chuyển động. Có thể thấy nghiệm Pontryagin không tối thiểu hóa biên độ tại

từng cơ cấu chấp hành riêng lẻ, mà phối hợp cả ba biến điều khiển để giảm chi phí hàm tích lũy.



Hình 4.13. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu

Bảng 4.1. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối

Quy luật chuyển động	Giá trị hàm mục tiêu $J$	Mức giảm của nghiệm tối ưu so với các quy luật đối chứng
Tối ưu theo Pontryagin	843,56	
Đa thức bậc ba	1195,88	29,46%
Đa thức bậc năm	1195,89	29,46%
S-curve	1196,02	29,47%

Ở thời điểm cuối, giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tối ưu đạt khoảng 843,56; trong khi các quy luật đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve lần lượt cho giá trị khoảng 1195,88; 1195,89 và 1196,02 (Hình 4.13 và Bảng 4.1). Kết quả trên cho thấy nghiệm tối ưu theo Pontryagin làm giảm gần 29,5% chi phí điều khiển so với các quy luật đối chứng. Điều này chứng tỏ nghiệm điều

khuyến tối ưu không chỉ thỏa mãn điều kiện biên và ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, mà còn đạt hiệu quả tốt hơn theo đúng tiêu chí tối ưu đã lựa chọn.

## 4.2. Điều khiển tối ưu tay máy trên quỹ đạo định sẵn theo chu trình

### 4.2.1. Đặt bài toán

Trong mục này sẽ xét bài toán điều khiển tối ưu tay máy robot theo quỹ đạo định sẵn theo chu trình. Điểm khác biệt cơ bản ở đây là chuyển động của tay máy không chỉ gồm một hành trình đơn lẻ, mà gồm hai giai đoạn kế tiếp nhau: giai đoạn đi mang tải từ vị trí xuất phát đến vị trí đích trên quỹ đạo và giai đoạn quay về không tải từ vị trí đích về lại vị trí ban đầu cũng trên chính quỹ đạo đó. Vì vậy, bài toán tối ưu không còn đặt ra cho một lần chuyển động riêng lẻ mà được xét cho toàn bộ chu trình làm việc của tay máy.

Xét tay máy phẳng RRR như trong mục 4.1. Chuyển động của tay máy thực hiện trong một chu trình bao gồm giai đoạn đi và giai đoạn về. Ở giai đoạn đi, tay máy mang tải trọng  $m$  ở điểm tác động cuối, di chuyển từ điểm đầu đến điểm đích trên quỹ đạo định sẵn. Ở giai đoạn về, tay máy di chuyển từ điểm đích về vị trí ban đầu và không mang tải, vẫn trên quỹ đạo định sẵn của điểm tác động cuối. Ngoài yêu cầu bảo đảm quỹ đạo hình học của điểm cuối, bài toán còn phải xét đến tính liên tục của chuyển động giữa hai giai đoạn chuyển động.

### 4.2.2. Xây dựng bài toán điều khiển tối ưu

Ở giai đoạn đi, điểm tác động cuối của tay máy di chuyển từ vị trí đầu  $M_0(x_0, y_0)$  ứng với cấu hình ban đầu  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  trong khoảng thời gian  $0 \leq t \leq t_{f1}$  đến vị trí cuối  $M_d(x_d, y_d)$  ứng với cấu hình  $\mathbf{q}(t_{f1}) = \mathbf{q}_d$  kèm tải trọng mang theo là  $m = m_d$ . Ở giai đoạn về, tay máy chuyển động không tải, điểm tác động cuối di chuyển từ vị trí  $M_d$  trở về vị trí  $M_f \equiv M_0$  ứng với cấu hình  $\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_0$  trong thời gian  $t_{f1} \leq t \leq t_{f2}$ . Tổng thời gian di chuyển của một chu trình là  $t_f = t_{f1} + t_{f2}$ .

Trong cả hai giai đoạn, điểm tác động cuối luôn phải thỏa mãn phương trình ràng buộc đã cho. Vì vậy, bài toán điều khiển tối ưu ở đây không chỉ yêu

cầu tay máy đi qua đúng các điểm đầu và cuối, mà còn đòi hỏi toàn bộ chuyển động khứ hồi phải diễn ra trên quỹ đạo định sẵn với chi phí điều khiển nhỏ nhất.

Hàm mục tiêu được lựa chọn cho mỗi giai đoạn của chuyển động là

$$J = \int_0^{t_f} f_0 dt \rightarrow \min \quad (3.37)$$

với

$$f_0 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (3.38)$$

Xác định hàm Hamilton có dạng như biểu thức (3.5). Trong giai đoạn đi và giai đoạn về, cấu trúc của hệ phương trình động lực học giữ nguyên, nhưng các hệ số trong phương trình sẽ thay đổi tương ứng với giá trị tải trọng tại điểm tác động cuối. Ở mỗi giai đoạn chuyển động, tay máy được mô tả bởi một hệ gồm 12 phương trình vi phân cấp một đối với 06 biến trạng thái (3.7) và 06 biến liên hợp (3.8), kết hợp với điều kiện tối ưu (3.9). Giải hệ phương trình vi phân này với các điều kiện biên sẽ thu được nghiệm tối ưu cần tìm.

### 4.2.3. Kết quả mô phỏng số

#### a) Thiết lập mô phỏng

Thực hiện mô phỏng tính toán với các tham số được chọn như trong mục 4.1.4. Các điều kiện biên của bài toán chuyển động theo chu trình được chọn như sau:

- Điều kiện biên của giai đoạn đi ( $0 \leq t \leq t_{f1} = 2[s]$ )

$$q_1(0) = 0[\text{rad}]; q_2(0) = \frac{\pi}{6}[\text{rad}]; q_3(0) = \frac{\pi}{6}[\text{rad}]$$

$$q_1(t_{f1}) = -\frac{\pi}{6}[\text{rad}]; q_2(t_{f1}) = \frac{2\pi}{3}[\text{rad}]; q_3(t_{f1}) = -\frac{\pi}{3}[\text{rad}];$$

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0$$

$$\dot{q}_1(t_{f1}) = \dot{q}_2(t_{f1}) = \dot{q}_3(t_{f1}) = 0$$

- Điều kiện biên của giai đoạn về ( $t_{f1} \leq t \leq t_f = 4[s]$ )

$$q_1(t_{f1}) = -\frac{\pi}{6} [\text{rad}]; q_2(t_{f1}) = \frac{2\pi}{3} [\text{rad}]; q_3(t_{f1}) = -\frac{\pi}{3} [\text{rad}];$$

$$q_1(t_f) = 0 [\text{rad}]; q_2(t_f) = \frac{\pi}{6} [\text{rad}]; q_3(t_f) = \frac{\pi}{6} [\text{rad}];$$

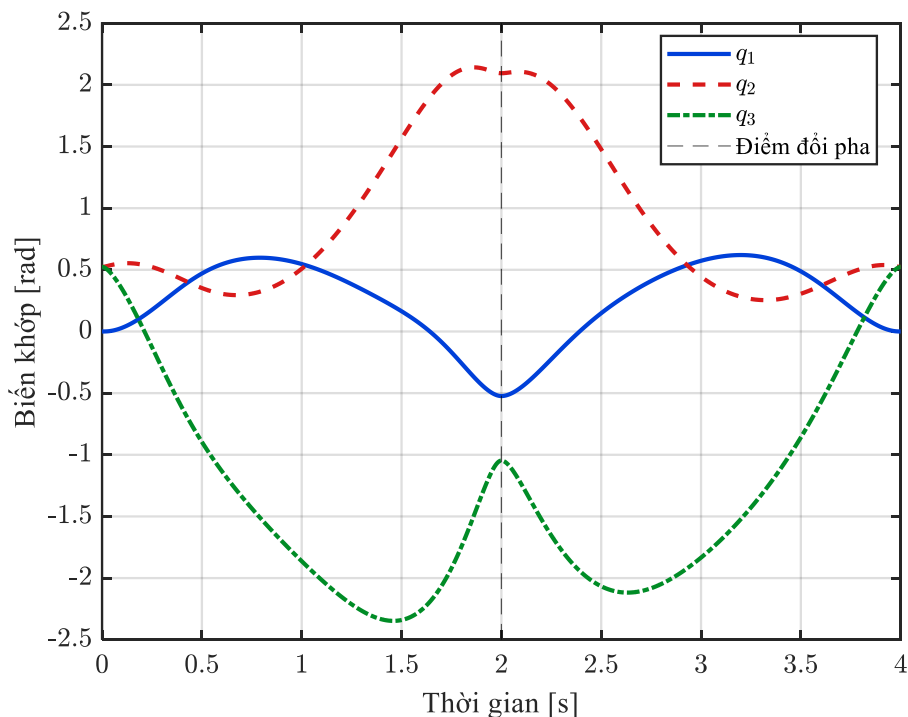
$$\dot{q}_1(t_{f1}) = \dot{q}_2(t_{f1}) = \dot{q}_3(t_{f1}) = 0;$$

$$\dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f) = \dot{q}_3(t_f) = 0$$

### b) Kết quả mô phỏng

Kết quả mô phỏng số được trình bày trên *Hình 4.14* đến *Hình 4.18*.

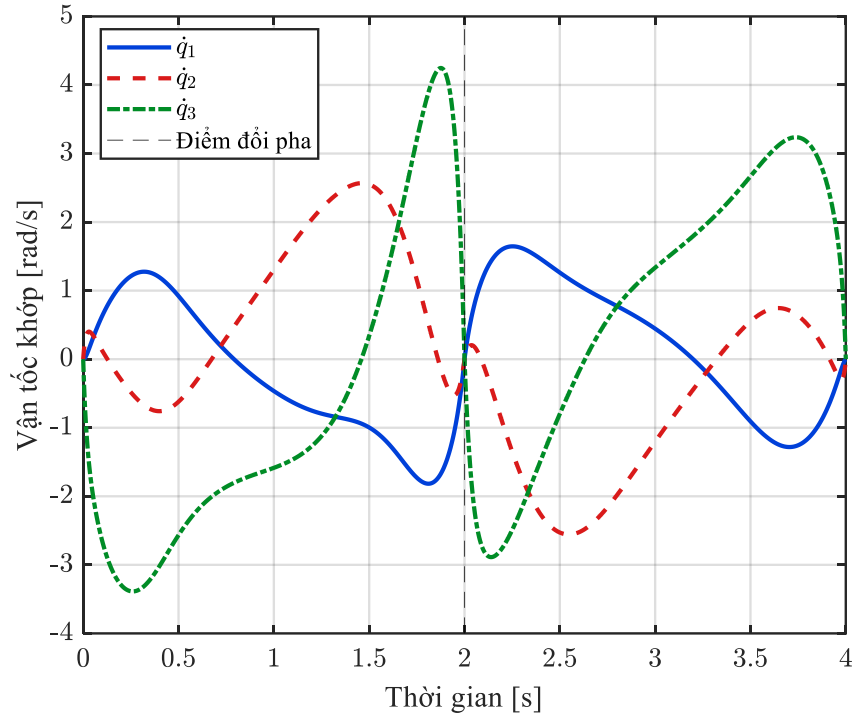
Đồ thị *Hình 4.14* cho thấy các biến khớp đều biến thiên liên tục theo thời gian trong cả hành trình đi và hành trình về. Giá trị của các tọa độ suy rộng tại đầu và cuối mỗi hành trình phù hợp với các điều kiện biên đã đặt ra. Tại thời điểm  $t = t_{f1}$ , trạng thái cuối của giai đoạn đi đồng thời là trạng thái đầu của giai đoạn về. Điều này bảo đảm tính liên tục về cấu hình của tay máy tại điểm chuyển pha của chu trình.



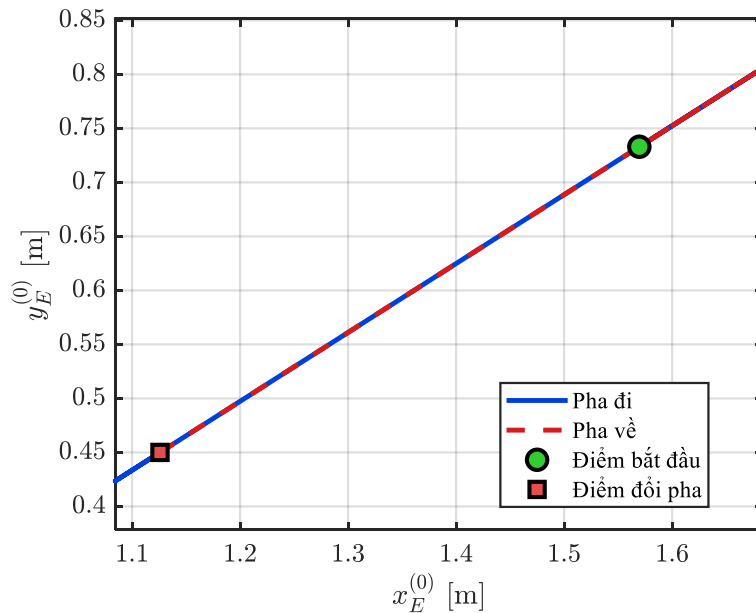
*Hình 4.14. Đồ thị các biến khớp giai đoạn đi và về*

*Hình 4.15* thể hiện vận tốc của các khớp trong toàn bộ chu trình. Các vận tốc khớp thỏa mãn điều kiện bằng không tại thời điểm đầu, tại điểm chuyển pha

và tại thời điểm kết thúc chu trình. Kết quả này phù hợp với điều kiện biên đã đặt ra, đồng thời cho thấy tay máy dừng tại vị trí chuyển pha trước khi thực hiện giai đoạn chuyển động về.

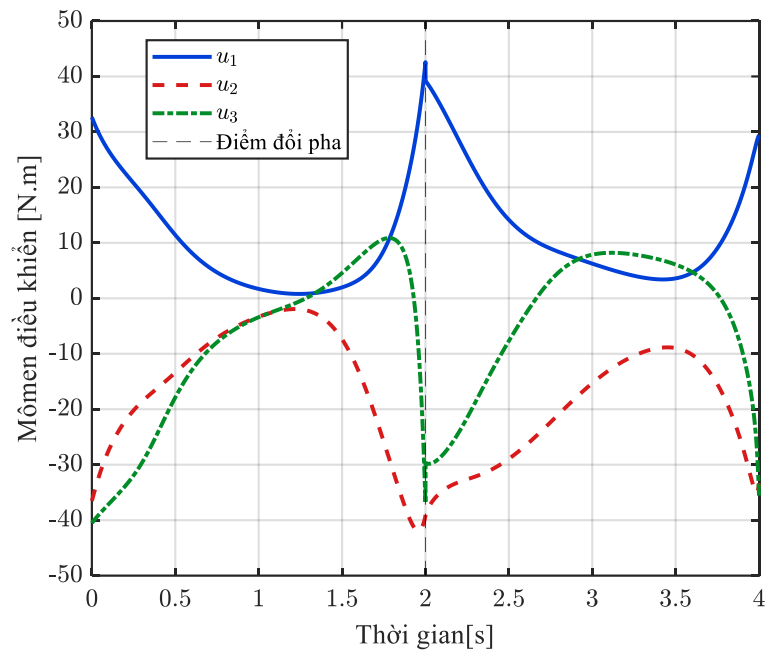


Hình 4.15. Đồ thị các vận tốc khớp giai đoạn đi và về

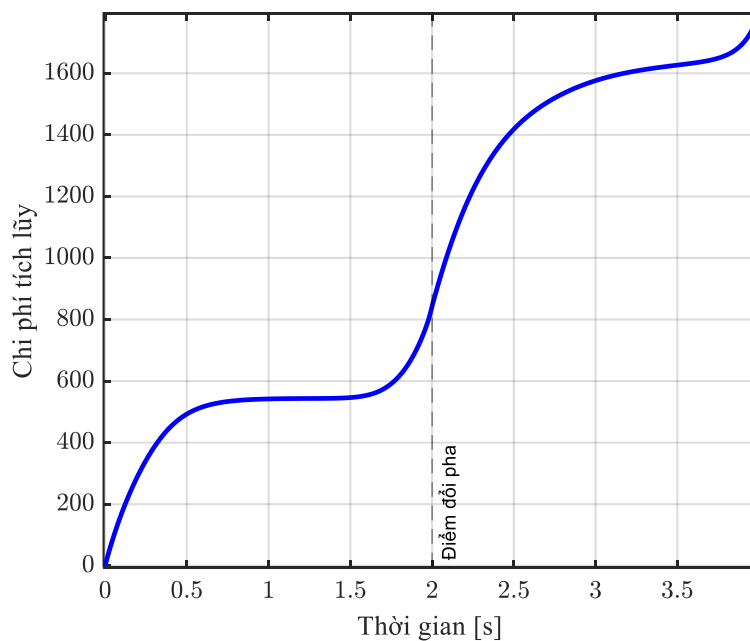


Hình 4.16. Đồ thị quỹ đạo điểm cuối

Kết quả biểu diễn quỹ đạo của điểm tác động cuối trong mặt phẳng thao tác trên *Hình 4.16* cho thấy quỹ đạo điểm cuối ở giai đoạn đi và giai đoạn về đều nằm trên đường ràng buộc hình học đã cho, cách xây dựng bài toán điều khiển tối ưu theo từng pha của chu trình vẫn bảo đảm yêu cầu ràng buộc quỹ đạo tại điểm tác động cuối.



*Hình 4.17. Đồ thị mômen điều khiển giai đoạn đi và về*

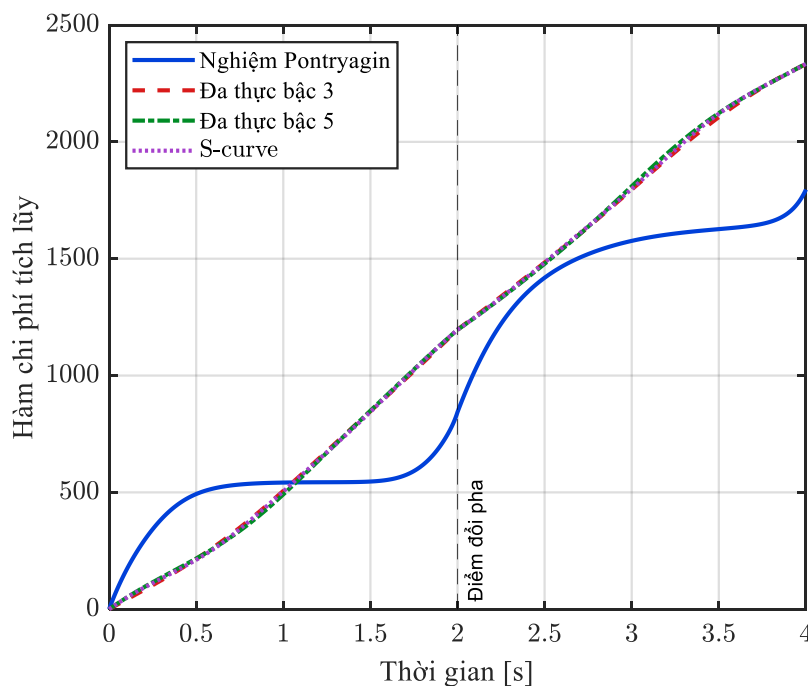


*Hình 4.18. Đồ thị hàm chi phí giai đoạn đi và về*

*Hình 4.17* biểu diễn các lực/mômen điều khiển tối ưu tương ứng với hai hành trình. Có thể thấy các lực điều khiển đều biến thiên liên tục theo thời gian, không xuất hiện đột biến lớn. Giá trị  $z(t)$  trên *Hình 4.18* tăng đơn điệu theo thời gian, phù hợp với bản chất của hàm mục tiêu.

#### 4.2.4. So sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng

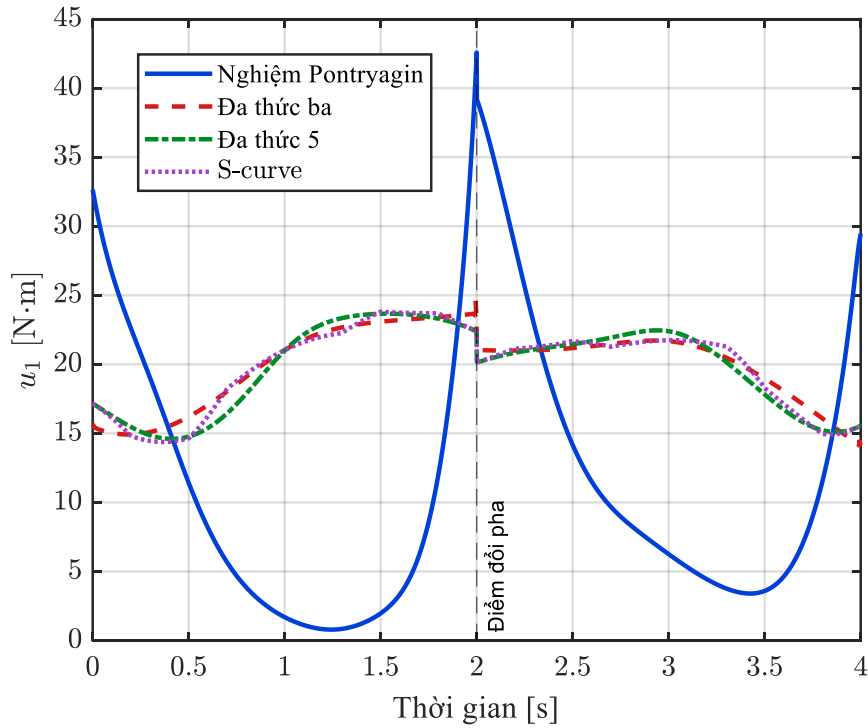
Khác với bài toán chuyển động một lượt ở mục 4.1, bài toán trong mục này gồm hai giai đoạn: giai đoạn đi từ vị trí  $M_0(x_0, y_0)$  đến vị trí  $M_d(x_d, y_d)$  và giai đoạn về từ vị trí  $M_d(x_d, y_d)$  trở lại vị trí  $M_0(x_0, y_0)$ . Trong mỗi giai đoạn, điểm tác động cuối của tay máy đều phải chuyển động trên đường ràng buộc hình học nối  $M_0$  và  $M_d$ . Vì vậy, các quy luật đối chứng được xây dựng riêng cho từng giai đoạn thông qua tham số chuyển động dọc theo quỹ đạo điểm cuối, thực hiện như đã trình bày trong mục 4.1.5. Kết quả so sánh được trình bày trên *Hình 4.19* đến *Hình 4.23* và *Bảng 4.2*.



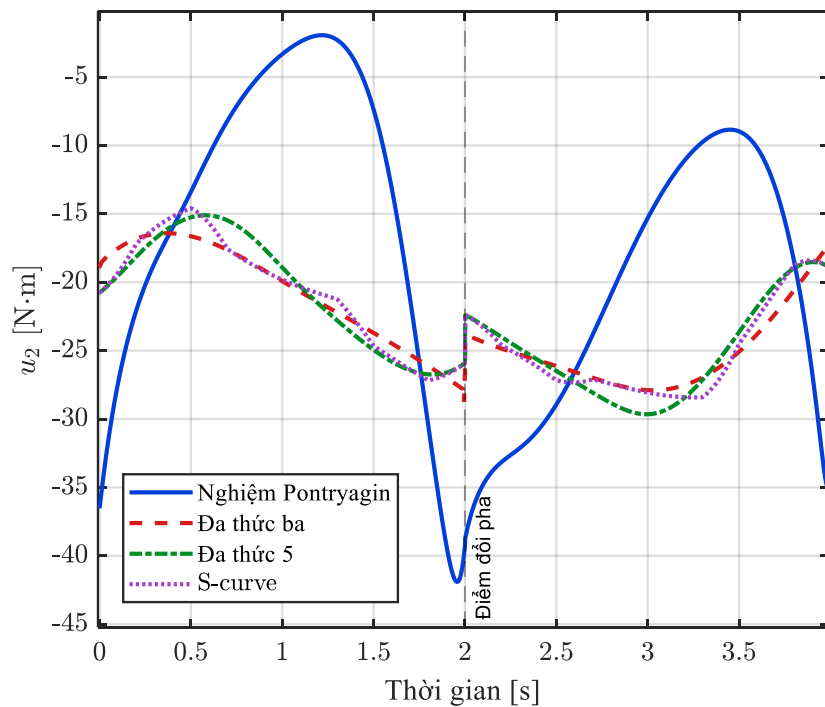
*Hình 4.19.* Đồ thị hàm chi phí tích lũy của các quy luật chuyển động

*Hình 4.19* biểu diễn sự biến thiên của hàm chi phí tích lũy theo thời gian đối với nghiệm tối ưu theo Pontryagin và các quy luật chuyển động đối chứng. Có thể nhận thấy đường chi phí tích lũy của nghiệm Pontryagin nằm thấp hơn

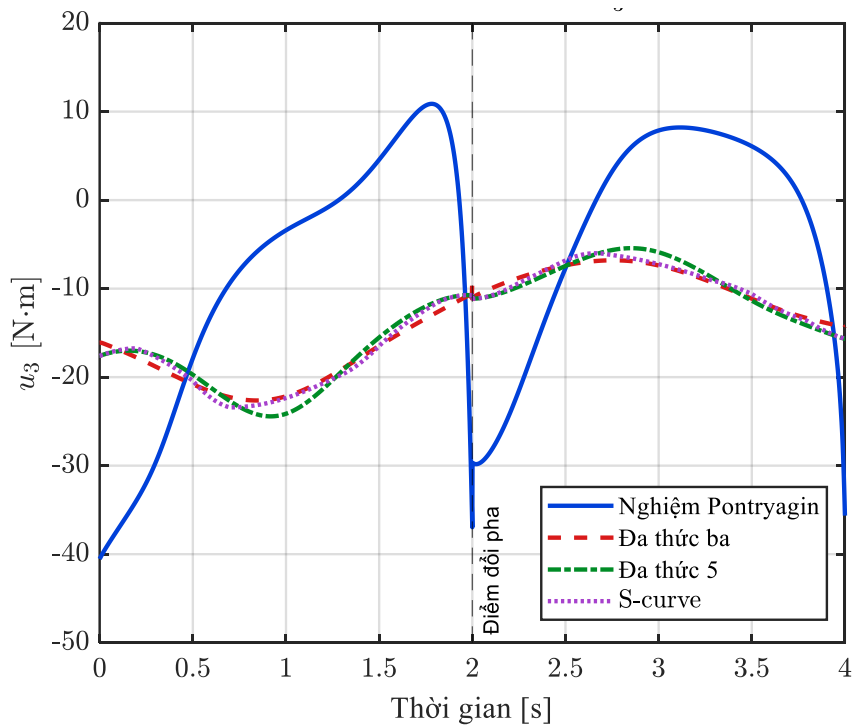
rõ rệt so với các quy luật đối chứng trong phần lớn thời gian của chu trình, kể cả pha đi và pha về. Như vậy, nghiệm tối ưu theo Pontryagin không chỉ làm giảm chi phí điều khiển trong toàn bộ chu trình, mà còn cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn trong từng giai đoạn riêng biệt.



Hình 4.20. Đồ thị mômen  $u_1$  của các quy luật chuyển động

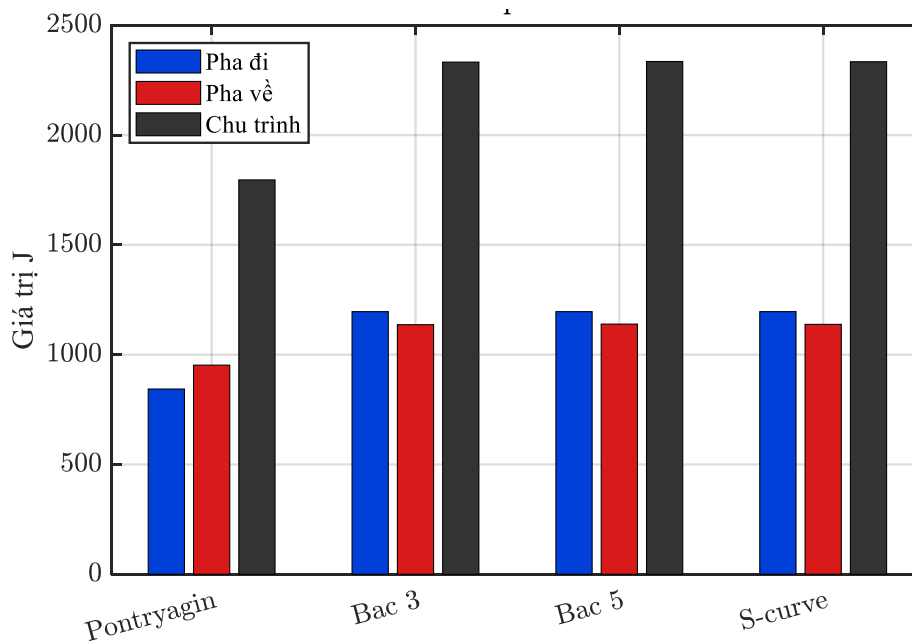


Hình 4.21. Đồ thị mômen  $u_2$  của các quy luật chuyển động



Hình 4.22. Đồ thị mômen  $u_3$  của các quy luật chuyển động

Ba đồ thị biến điều khiển trên Hình 4.20 đến Hình 4.22 cho thấy tín hiệu điều khiển của các phương pháp đều liên tục và không xuất hiện các đỉnh bất thường do suy biến quỹ đạo như trước. Tại thời điểm chuyển pha, tín hiệu có sự thay đổi đáng kể do điểm cuối tay máy đổi chiều chuyển động, đồng thời tải được tháo khỏi điểm cuối nên mô hình động lực học của pha về khác pha đi.



Hình 4.23. Biểu đồ so sánh giá trị hàm mục tiêu toàn chu trình

*Bảng 4.2. So sánh giá trị hàm mục tiêu giữa nghiệm tối ưu và các quy luật chuyển động đối chứng trong chuyển động chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối theo chu trình*

<b>Quy luật chuyển động</b>	<b>Giá trị hàm mục tiêu <math>J</math> toàn chu trình</b>	<b>Mức giảm của nghiệm tối ưu so với các quy luật đối chứng trong toàn bộ chu trình</b>
Tối ưu theo Pontryagin	1795,79	
Đa thức bậc ba	2332,38	23,01%
Đa thức bậc năm	2335,12	23,10%
S-curve	2334,06	23,06%

Tại thời điểm kết thúc chu trình, giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tối ưu là 1795,79; trong khi các quy luật đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve có giá trị lần lượt là 2332,38; 2335,12; 2334,06 (*Hình 4.23*). Kết quả trong *Bảng 4.2* cho thấy giá trị hàm mục tiêu toàn chu trình của nghiệm tối ưu theo Pontryagin giảm 23,01% so với quy luật đa thức bậc ba, giảm 23,10% so với quy luật đa thức bậc năm và giảm 23,06% so với quy luật S-curve. Điều này chứng tỏ nghiệm điều khiển tối ưu đạt hiệu quả định lượng rõ rệt theo đúng tiêu chí tối ưu nỗ lực điều khiển.

Như vậy, kết quả so sánh định lượng cho thấy phương pháp điều khiển tối ưu được sử dụng không chỉ phù hợp với bài toán chuyển động đơn chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, mà còn có thể mở rộng hiệu quả cho bài toán chuyển động theo chu trình. Việc tách chi phí theo pha đi, pha về và toàn chu trình cũng cho thấy nghiệm tối ưu theo Pontryagin duy trì ưu thế so với các quy luật đối chứng trong cả hai giai đoạn chuyển động.

#### **Kết luận chương 4**

Từ nội dung và kết quả đạt được của chương 4 có thể rút ra kết luận như sau:

1- Khung phương pháp nghiên cứu của luận án có thể tiếp tục được mở rộng từ bài toán chuyển động điểm-điểm sang bài toán điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối. Trong trường hợp này, việc kết hợp phương pháp ma trận truyền với nguyên lý phù hợp cho phép thiết lập được phương trình chuyển động của hệ chịu ràng buộc dưới dạng thích hợp để tiếp tục xây dựng bài toán điều khiển tối ưu. Đây là cơ sở lý thuyết quan trọng để xử lý các bài toán chuyển động công nghệ mà điểm tác động cuối phải bám theo một quỹ đạo xác định trước.

2- Việc áp dụng nguyên lý cực đại Pontryagin cho các mô hình tay máy chịu ràng buộc quỹ đạo đã cho phép đưa bài toán tối ưu về dạng hệ phương trình vi phân biên hai điểm trong cả hai trường hợp khảo sát: chuyển động một lần theo quỹ đạo định sẵn và chuyển động theo chu kỳ trên quỹ đạo định sẵn. Kết quả này cho thấy hướng tiếp cận của luận án không chỉ phù hợp với hệ cơ học không ràng buộc, mà còn có thể xử lý được các hệ cơ học chịu ràng buộc hình học trong suốt quá trình chuyển động.

3- Các kết quả mô phỏng số cho thấy nghiệm tối ưu thu được đều bảo đảm điểm tác động cuối bám đúng quỹ đạo yêu cầu, đồng thời các tọa độ suy rộng, vận tốc suy rộng và lực điều khiển biến thiên liên tục. Các kết quả so sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng đã làm rõ hơn hiệu quả của nghiệm tối ưu theo Pontryagin. Đối với bài toán chuyển động đơn chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, giá trị hàm mục tiêu của nghiệm tối ưu giảm lần lượt khoảng 29,46%; 29,46% và 29,47% so với các quy luật chuyển động đối chứng. Đối với bài toán chuyển động theo chu trình, giá trị hàm mục tiêu toàn chu trình của nghiệm tối ưu giảm lần lượt khoảng 23,01%; 23,10% và 23,06%. Những kết quả đó khẳng định tính khả thi và hiệu quả của khung phương pháp mà luận án đã đề xuất đối với lớp bài toán điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp chịu ràng buộc quỹ đạo.

## KẾT LUẬN CHUNG VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TIẾP THEO

### Kết luận chung

Từ nội dung và kết quả đạt được của luận án, có thể rút ra các kết luận sau:

1- Luận án đã xây dựng được một khung phương pháp nghiên cứu tương đối thống nhất cho lớp bài toán phân tích động lực học và tối ưu hóa chuyển động tay máy công nghiệp. Trong khung đó, phương pháp ma trận truyền được sử dụng để mô tả động học, phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận được sử dụng để thiết lập mô hình động lực học của hệ không ràng buộc, nguyên lý phù hợp được sử dụng để xây dựng phương trình chuyển động của hệ chịu ràng buộc, còn nguyên lý cực đại Pontryagin được sử dụng để thiết lập các điều kiện cần tối ưu. Sự kết hợp các công cụ này cho phép hình thành một khung nghiên cứu chặt chẽ, đi từ mô hình cơ học đến bài toán điều khiển tối ưu.

2- Đối với bài toán chuyển động điểm-điểm, luận án đã phát biểu, xây dựng và giải được bài toán điều khiển tối ưu cho hai trường hợp tiêu biểu là chuyển động đến điểm đích và chuyển động theo chu trình. Kết quả thu được cho thấy các mô hình động lực học được thiết lập là phù hợp, bài toán tối ưu được phát biểu đúng đắn, và lời giải tối ưu thu được bảo đảm tay máy thực hiện đúng yêu cầu chuyển động với các biến khớp, vận tốc khớp và tín hiệu điều khiển biến thiên liên tục, hợp lý về mặt cơ học.

3- Đối với bài toán chuyển động chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối, luận án đã mở rộng được khung phương pháp từ hệ không ràng buộc sang hệ chịu ràng buộc hình học. Trên cơ sở đó, luận án đã khảo sát hai trường hợp là chuyển động đơn một lần theo quỹ đạo định sẵn và chuyển động theo chu kỳ trên quỹ đạo định sẵn. Các kết quả nghiên cứu cho thấy phương trình chuyển động của hệ chịu ràng buộc có thể được thiết lập dưới dạng thích hợp để áp dụng nguyên lý Pontryagin, từ đó xác định được luật điều khiển tối ưu bảo đảm điểm tác động cuối bám đúng quỹ đạo yêu cầu trong suốt quá trình chuyển động.

4- Các kết quả mô phỏng số trong luận án cho thấy nghiệm tối ưu thu được có ý nghĩa không chỉ về mặt toán học mà còn về mặt cơ học. Trong các trường hợp khảo sát, quỹ đạo chuyển động của điểm tác động cuối được thực hiện theo yêu cầu, các tọa độ suy rộng, vận tốc suy rộng và lực/mômen điều khiển biến thiên liên tục, không xuất hiện đột biến bất thường. Đặc biệt, các kết quả so sánh định lượng với các quy luật chuyển động đối chứng như đa thức bậc ba, đa thức bậc năm và S-curve cho thấy nghiệm tối ưu theo Pontryagin làm giảm rõ rệt giá trị hàm mục tiêu.

5- Về mặt đóng góp, luận án không chỉ dừng ở việc áp dụng các kết quả lý thuyết đã biết cho các mô hình cụ thể, mà đã tổ chức và phát triển được một hướng xử lý có tính hệ thống cho lớp bài toán động lực học và điều khiển tối ưu tay máy công nghiệp. Các mô hình tay máy phẳng 3 bậc tự do được khảo sát trong luận án đóng vai trò minh họa và kiểm chứng cho khung phương pháp đề xuất. Thông qua các trường hợp chuyển động điểm-điểm, chuyển động theo chu trình, chuyển động chịu ràng buộc quỹ đạo điểm cuối và chuyển động theo chu trình trên quỹ đạo định sẵn, luận án đã làm rõ khả năng áp dụng của khung phương pháp đối với nhiều dạng yêu cầu chuyển động khác nhau của tay máy công nghiệp.

### **Hướng phát triển tiếp theo**

1- Mở rộng hướng nghiên cứu của luận án cho các mô hình tay máy robot có cấu trúc không gian và số bậc tự do lớn hơn.

2- Nghiên cứu bổ sung vào mô hình động lực học các yếu tố ảnh hưởng thực tế như môi trường có vật cản, sai lệch mô hình động lực học, tính đàn hồi của khâu và khớp.

3- Nghiên cứu kiểm chứng bằng thực nghiệm trên mô hình tay máy robot cụ thể.

**DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ**

1. Khoa Do Dang, **Kien Tran Si**, Phong Phan Dang, Sanh Do (2022). Optimal Control of a 3-link Robot Manipulator Moving to a Prescribed Point. ASIAN MMS 2021. Mechanisms and Machine Science, vol 113. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7\\_43](https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7_43), SCOPUS.
2. Khoa Do Dang, **Kien Tran Si**, Phong Phan Dang, Sanh Do (2022). Optimal Control of a 3-DOF Robot Manipulator Subject to a Prescribed Trajectory. ASIAN MMS 2021. Mechanisms and Machine Science, vol 113. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-91892-7_44), SCOPUS.
3. Do Dang Khoa, **Tran Si Kien**, Phan Dang Phong, Do Sanh (2022), “Analysis of optimal motion of the palletizing manipulator in an operating cycle”, Hội nghị khoa học toàn quốc lần thứ hai về Động lực học và Điều khiển, Hà Nội 3/2022.
4. Đỗ Đăng Khoa, **Trần Sĩ Kiên**, Phan Đăng Phong, Đỗ Sanh (2022), “Chuyển động tối ưu khứ hồi của tay máy bốc xếp theo một quỹ đạo định sẵn”, Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI, Hà Nội 12/2022, Tr. 115-126.
5. Nguyễn Đình Huỳnh, Phan Đăng Phong, Đỗ Đăng Khoa, **Trần Sĩ Kiên**, Đỗ Sanh (2024), “Điều khiển tối ưu tay máy robot không gian trong bài toán chuyển động điểm - điểm”, Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 45 năm thành lập Viện Cơ học, Hà Nội, 4/2024, Tr. 597-604.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tài liệu tiếng Việt

- [1] S. Đỗ and P. Đ. Phan, Động lực học điều khiển máy và rô bốt. Hà Nội, Việt Nam: NXB Giáo Dục Việt Nam, 2020.
- [2] H. Q. Nguyễn, Cơ sở Robotics: Cơ học và điều khiển. Hà Nội, Việt Nam: Nhà xuất bản Bách khoa Hà Nội, 2022.
- [3] H. T. Lưu and A. P. T. Nguyễn, “Thiết kế quỹ đạo tối ưu cho robot sử dụng thuật toán di truyền,” Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 2022.
- [4] A. K. Le, H. P. Nguyen, X. V. Nguyen, N. L. Nguyen, and A. T. Le, “Thiết kế chế tạo hệ thống điều khiển robot bốc xếp AKB,” in Kỹ yếu Hội nghị toàn quốc lần thứ 8 về Cơ điện tử, 2016.
- [5] X. B. Duong and A. M. Chu, “Controller design for enhancement position accuracy of a rigid-flexible links robot by using particle swarm optimization algorithm,” in Kỹ yếu Hội nghị Khoa học và Công nghệ toàn quốc về Cơ khí lần thứ V, 2018.
- [6] M. Q. Nguyễn, B. M. Chu, and B. M. Hà, “Tối ưu hóa góc quay các khớp trong điều khiển cánh tay robot,” Tạp chí Khoa học và Công nghệ, 2022.

### Tài liệu tiếng Anh

- [7] ISO, ISO 8373:2021 Robotics-Vocabulary. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization, 2021.
- [8] International Federation of Robotics, World Robotics 2024: Industrial Robots. Frankfurt am Main, Germany: IFR, 2024.
- [9] K. Wang, L. Ding, F. Dailami, and J. Matthews, “A Contemporary Review of Collaborative Robotics Employed in Manufacturing Finishing Operations: Recent Progress and Future Directions,” Machines, vol. 13, no. 9, art. no. 772, 2025, doi: 10.3390/machines13090772.

- [10] International Federation of Robotics, World Robotics 2024 – Executive Summary / Press Conference Materials. Frankfurt am Main, Germany: IFR, 2024.
- [11] Y. Cao et al., “Human-robot collaborative assembly and welding: A review and analysis of the state of the art”, *Journal of Manufacturing Processes*, Volume 131, p. 1388-1403, 2024, doi: 10.1016/j.jmapro.2024.09.044.
- [12] V. Tinoco, M. F. Silva, F. N. dos Santos, R. Morais, S. A. Magalhães, and P. M. Oliveira, “A review of advanced controller methodologies for robotic manipulators,” *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 13, art. no. 36, 2025, doi: 10.1007/s40435-024-01533-1.
- [13] S. Romero, J. Valero, A. V. García, C. F. Rodríguez, A. M. Montes, C. Marín, R. Bolaños, and D. Álvarez-Martínez, “Trajectory Planning for Robotic Manipulators in Automated Palletizing: A Comprehensive Review,” *Robotics*, vol. 14, no. 5, art. no. 55, 2025, doi: 10.3390/robotics14050055.
- [14] P. Jiang et al., “Industrial robot energy consumption model identification: A coupling model-driven and data-driven paradigm,” *Expert Systems with Applications*, Volume 262, 2025, doi: 10.1016/j.eswa.2024.125604.
- [15] V. S. D. M. Sahu, P. Samal, and C. K. Panigrahi, “Modelling and Control Techniques of Robotic Manipulators: A Review,” *Materials Today: Proceedings*, 2022.
- [16] J. Liu, H. J. Yap, and A. S. M. Khairuddin, “Review on Motion Planning of Robotic Manipulator in Dynamic Environments,” *Journal of Sensors*, vol. 2024, art. no. 5969512, 2024, doi: 10.1155/2024/5969512.
- [17] W. Huang, H. Min, Y. Guo, and M. Liu, “A review of dynamic parameters identification for manipulator control,” *Cobot*, vol. 1, art. no. 5, 2022.
- [18] J. Muru et al., “A Scoping Review of Energy Consumption in Industrial Robotics,” *Machines*, 13, 542, 2025, doi: 10.3390/machines13070542.
- [19] O. Khatib and B. Siciliano, Eds., *Springer Handbook of Robotics*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 2008.

- [20] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*. London, U.K.: Springer, 2009.
- [21] B. Ai, S. Tian, H. Shi, Y. Wang, T. Pfaff, C. Tan, H. Christensen, H. Su, J. Wu, and Y. Li, “A review of learning-based dynamics models for robotic manipulation,” *Science Robotics*, vol. 10, no. 106, art. no. eadt1497, 2025, doi: 10.1126/scirobotics.adt1497.
- [22] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed. New York, NY, USA: Springer, 2006.
- [23] A. Calzada-Garcia et al., “A Review on Inverse Kinematics, Control and Planning for Robotic Manipulators With and Without Obstacles via Deep Neural Networks,” *Algorithms*, vol. 18, no. 1, p. 23, 2025, doi: 10.3390/a18010023.
- [24] X. Wang, J. Cao, Y. Cao, and F. Zou, “Energy-efficient trajectory planning for a class of industrial robots using parallel deep reinforcement learning,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 113, no. 8, pp. 8491–8511, 2025, doi: 10.1007/s11071-024-10510-4.
- [25] S. Luo and Q. Li, “A review of the trajectory planning of industrial robots,” *Transactions on Engineering and Technology Research*, 2024.
- [26] Y. Ouyang, L. Dong, and C. Sun, “Critic Learning-Based Control for Robotic Manipulators With Prescribed Constraints,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 52, no. 4, pp. 2274–2283, 2022.
- [27] S. Miranda, C. R. Vázquez, and M. Navarro-Gutiérrez, “Energy consumption analysis and optimization in collaborative robots,” *Frontiers in Robotics and AI*, vol. 12, art. no. 1671336, 2025, doi: 10.3389/frobt.2025.1671336.
- [28] J. Li, X. Peng, B. Li, V. Sreeram, J. Wu, Z. Chen, and M. Li, “Model predictive control for constrained robot manipulator visual servoing tuned by reinforcement learning,” *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 20, no. 6, pp. 10495–10513, 2023, doi: 10.3934/mbe.2023463.

- [29] A. AlAttar, D. Chappell, and P. Kormushev, “Kinematic-Model-Free Predictive Control for Robotic Manipulator Target Reaching With Obstacle Avoidance,” *Frontiers in Robotics and AI*, vol. 9, art. no. 809114, 2022, doi: 10.3389/frobt.2022.809114.
- [30] Í. Elguea-Aguinaco, I. Inziarte-Hidalgo, S. Bøgh, and N. Arana-Arexolaleiba, “A Review on Reinforcement Learning for Motion Planning of Robotic Manipulators,” *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 2024, art. no. 1636497, 2024, doi: 10.1155/2024/1636497.
- [31] V. C. Nguyen, H. L. Thi, and T. L. Nguyen, “A Lyapunov-based model predictive control strategy with a disturbances compensation mechanism for dual-arm manipulators,” *European Journal of Control*, vol. 75, art. no. 100913, 2024, doi: 10.1016/j.ejcon.2023.100913.
- [32] M. Soori, B. Arezoo, and R. Dastres, “Optimization of energy consumption in industrial robots: A review,” *Cognitive Robotics*, vol. 3, pp. 142–157, 2023, doi: 10.1016/j.cogr.2023.05.001.
- [33] T. Balkan, “A dynamic programming approach to optimal control of robotic manipulators,” *Mechanics Research Communications*, vol. 25, no. 2, pp. 225–230, 1998.
- [34] D. Kaserer, H. Gattringer, and A. Müller, “Nearly Optimal Path Following With Jerk and Torque Rate Limits Using Dynamic Programming,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 35, no. 2, pp. 521–528, 2019, doi: 10.1109/TRO.2018.2880120.
- [35] K. G. Shin and N. D. McKay, “A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, no. 6, pp. 491–500, 1986, doi: 10.1109/TAC.1986.1104317.
- [36] M. Diehl, H. G. Bock, H. Diedam, and P.-B. Wieber, “Fast Direct Multiple Shooting Algorithms for Optimal Robot Control,” in *Fast Motions in Biomechanics and Robotics*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 2006.

- [37] J. Kim, S.-R. Kim, S.-J. Kim, and D.-H. Kim, "A practical approach for minimum-time trajectory planning for industrial robots," *Industrial Robot*, vol. 37, no. 1, pp. 51–61, 2010, doi: 10.1108/01439911011009957.
- [38] Q. Zhang and M.-Y. Zhao, "Minimum time path planning of robotic manipulator in drilling/spot welding tasks," *Journal of Computational Design and Engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 132–139, 2016, doi: 10.1016/j.jcde.2015.10.004.
- [39] A. Gasparetto and V. Zanotto, "A technique for time-jerk optimal planning of robot trajectories," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 24, no. 3, pp. 415–426, 2008, doi: 10.1016/j.rcim.2007.04.001.
- [40] M. Massaro, S. Lovato, M. Bottin, and G. Rosati, "An Optimal Control Approach to the Minimum-Time Trajectory Planning of Robotic Manipulators," *Robotics*, vol. 12, no. 3, art. no. 64, 2023, doi: 10.3390/robotics12030064.
- [41] J. Ye, L. Hao, and H. Cheng, "Multi-objective optimal trajectory planning for robot manipulator attention to end-effector path limitation," *Robotica*, vol. 42, no. 6, pp. 1761–1780, 2024, doi: 10.1017/S0263574724000481.
- [42] Z. Xu et al., "Optimal Trajectory Planning for Manipulators with Efficiency and Smoothness Constraint," *Electronics*, 12, 2928, 2023, doi: Optimal Trajectory Planning for Manipulators with Efficiency and Smoothness Constraint.
- [43] B. Rezali et al., "Optimal trajectory planning for industrial robots: Minimizing time, jerk, and energy consumption using LSTM for energy profile modeling," *Journal of Vibration and Control*, 2025, doi: 10.1177/10775463251333481.
- [44] Z. Shiller, "Time-energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 118, no. 1, pp. 139–143, 1996, doi: 10.1115/1.2801134.

- [45] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1962.
- [46] J. Borrow, *Optimal Control of Robotic Manipulators*, Ph.D. dissertation, University of California, Los Angeles, Los Angeles, CA, USA, 1982.
- [47] J. Gregory, A. Olivares, and E. Staffetti, “Energy-optimal trajectory planning for robot manipulators with holonomic constraints,” *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 2, pp. 279–291, 2012, doi: 10.1016/j.sysconle.2011.11.005.
- [48] R. Benotsmane et al., “Optimization of Energy Consumption of Industrial Robots through Optimal Control Strategies,” *Energies*, vol. 16, no. 8, art. no. 3499, 2023, doi: 10.3390/en16083444.
- [49] R. A. Rojas, M. A. Ruiz Garcia, E. Wehrle, and R. Vidoni, “A Variational Approach to Minimum-Jerk Trajectories for Psychological Safety in Collaborative Assembly Stations,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 4, no. 2, pp. 823–829, 2019, doi: 10.1109/LRA.2019.2893018.
- [50] R. A. Rojas, M. A. Ruiz Garcia, L. Gualtieri, and E. Rauch, “Combining safety and speed in collaborative assembly systems: An approach to time optimal trajectories for collaborative robots,” *Procedia CIRP*, vol. 97, pp. 308–312, 2021, doi: 10.1016/j.procir.2020.08.003.
- [51] S. Yin, W. Ji, and L. Wang, “A machine learning based energy efficient trajectory planning approach for industrial robots,” *Procedia CIRP*, vol. 81, pp. 429–434, 2019, doi: 10.1016/j.procir.2019.03.074.
- [52] X. Zhang and G. Shi, “Multi-objective optimal trajectory planning for manipulators in the presence of obstacles,” *Robotica*, vol. 40, no. 4, pp. 888–906, 2022, doi: 10.1017/S0263574721000886.
- [53] Y. Zhang et al., “Time-energy consumption optimal path-constrained trajectory planning of excavator robotics,” *The Journal of Engineering*, 2024, doi: 10.1049/tje2.12406.

- [54] T. Chettibi et al., “Multi-objective trajectory planning for industrial robots using a hybrid optimization approach,” *Robotica*, vol. 42, no. 6, pp. 1781–1800, 2024, doi: 10.1017/S0263574724000766.
- [55] S. F. P. Saramago and V. Steffen Jr., “Optimization of the trajectory planning of robot manipulators taking into account the dynamics of the system,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 7, pp. 883–894, 1998, doi: 10.1016/S0094-114X(97)00110-9.
- [56] S. F. P. Saramago and V. Steffen Jr., “Optimal trajectory planning of robot manipulators in the presence of moving obstacles,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, no. 8, pp. 1079–1094, 2000, doi: 10.1016/S0094-114X(99)00062-2.
- [57] F. Wang, Z. Wu, and T. Bao, “Time-Jerk optimal Trajectory Planning of Industrial Robots Based on a Hybrid WOA-GA Algorithm,” *Processes*, vol. 10, no. 5, art. no. 1014, 2022, doi: 10.3390/pr10051014.
- [58] S. Ye et al., “Time-Optimal Trajectory Planning for Industrial Robots Based on Improved Fire Hawk Optimization Algorithm,” *Machines*, vol. 13, no. 9, art. no. 764, 2025, doi: 10.3390/machines13090764.
- [59] C. Qian et al., “Time-Jerk Optimal Robotic Trajectory Planning Under Compound Constraints and Joint Continuity,” *Actuators*, vol. 14, no. 6, art. no. 272, 2025, doi: 10.3390/act14060272.
- [60] P. Tangpattanakul, A. Meesomboon, and P. Artrit, “Optimal Trajectory of Robot Manipulator Using Harmony Search Algorithms,” in *Recent Advances in Harmony Search Algorithm*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 2010.
- [61] S. Dubowsky, M. Norris, and Z. Shiller, “Time optimal trajectory planning for robotic manipulators with obstacle avoidance: A CAD approach,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation (ICRA)*, 1986.
- [62] Z. Shiller, “Computation of path constrained time optimal motions with dynamic singularities,” in *ASME Dynamic Systems and Control Division*, 1992.

- [63] A. Nikoobin and M. Moradi, “Optimal balancing of robot manipulators in point-to-point motion,” *Robotica*, vol. 29, no. 2, pp. 233–244, 2011, doi: 10.1017/S0263574710000093.
- [64] M. Asgari and A. Nikoobin, “Analysis of Optimal Dynamic Manipulation for Robotic Manipulator Based on Pontryagin’s Minimum Principle,” *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 45, pp. 9159–9169, 2020, doi: 10.1007/s13369-020-04663-8.
- [65] H. C. Ramírez-de-Ávila, J. A. Rojas-Quintero, S. Morales-López, and E. Bugarin, “Comparing cost functions for the optimal control of robotic manipulators using Pontryagin’s Maximum Principle,” in *Proc. 2021 XXIII Robotics Mexican Congress (ComRob)*, Tijuana, Mexico, Oct. 27–29, 2021, pp. 106–111.

## PHỤ LỤC

### Thuật toán giải hệ phương trình biên hai điểm

#### 1. Phần mềm và phương pháp giải

- Phần mềm sử dụng: MATLAB<sup>®</sup> phiên bản R2023b;
- Thư viện sử dụng: CasADi;
- Bộ giải sử dụng: IPOPT;
- Phương pháp giải: phương pháp điểm ghép (collocation method).

#### 2. Các bước của thuật toán giải

##### *Bước 1. Xây dựng mô hình động lực học của tay máy*

Mô hình động lực học của tay máy được viết dưới dạng:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{qt}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + \mathbf{F}_c = \mathbf{u} - \mathbf{G} + \mathbf{F}_c ; \mathbf{G} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$$

Sau đó, hệ được chuyển về dạng trạng thái:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

```

qdd = solve(Aq, u - Qqt - G - Fvis);
x    = [q; qd];
xdot = [qd; qdd];
fX = Function( ...
    'fX_RRP1', ...
    {x, u}, ...
    {xdot});

```

##### *Bước 2. Thiết lập Hamiltonian*

```

p = SX.sym('p', nx, 1);
Rv = SX.sym('Rv', nu, 1);

Rmat = diag(Rv);

H_effort = 0.5*(u.'*Rmat*u) + p.'*xdot;

```

```
Hx = jacobian(H_effort, x) .';
Hp = jacobian(H_effort, p) .';
Hu = jacobian(H_effort, u) .';

pdot_effort = -Hx;
dHdu_effort = Hu;
```

### ***Bước 3. Thiết lập hệ điều kiện Pontryagin***

```
fHam = Function( ...
    'fHam_RRP1', ...
    {x, p, u, Rv}, ...
    {Hp, -Hx, Hu, H_effort});
```

### ***Bước 4. Thiết lập lưới thời gian và các biến cần tìm***

```
N = 100;
h = tf/N;
tgrid = linspace(0, tf, N+1);
```

Ở mỗi nút thời gian, các biến trạng thái, biến liên hợp và biến điều khiển được xem là biến cần tìm:

```
opti = Opti();

X = opti.variable(nx, N+1);
P = opti.variable(nx, N+1);
U = opti.variable(nu, N+1);
```

### ***Bước 5. Áp đặt điều kiện biên của trạng thái***

```
opti.subject_to(X(:,1) == par.x0);
opti.subject_to(X(:,end) == par.xf);
```

### ***Bước 6. Rời rạc hóa hệ Pontryagin***

Phương trình trạng thái và liên hợp được rời rạc hoá theo công thức sau:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{h}{2}(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1})$$

$$p_{k+1} - p_k = \frac{h}{2}(\dot{p}_k + \dot{p}_{k+1})$$

```
for k = 1:N
```

```

xk    = X(:,k);
xkp1  = X(:,k+1);

pk    = P(:,k);
pkp1  = P(:,k+1);

uk    = U(:,k);
ukp1  = U(:,k+1);

[xdot_k,   pdot_k,   ~, ~] = dyn.fHam(xk,   pk,
uk,   Rv);
[xdot_kp1, pdot_kp1, ~, ~] = dyn.fHam(xkp1, pkp1,
ukp1, Rv);

    opti.subject_to(xkp1 - xk == h/2*(xdot_k +
xdot_kp1));

    opti.subject_to(pkp1 - pk == h/2*(pdot_k +
pdot_kp1));

end

```

Như vậy, hệ vi phân liên tục của Pontryagin được chuyển thành hệ ràng buộc đại số phi tuyến tại các nút thời gian.

### ***Bước 7. Áp đặt điều kiện dừng theo điều khiển***

```

for k = 1:N+1

    xk = X(:,k);
    pk = P(:,k);
    uk = U(:,k);

    [~, ~, Hu_k, ~] = dyn.fHam(xk, pk, uk, Rv);

    opti.subject_to(Hu_k == 0);

```

```
end
```

### ***Bước 8. Khởi tạo nghiệm cho bài toán gián tiếp***

Do hệ phương trình biên hai điểm có tính phi tuyến mạnh, nghiệm khởi tạo có ảnh hưởng lớn đến khả năng hội tụ. Vì vậy, trước tiên bài toán được giải bằng phương pháp điểm ghép trực tiếp (direct collocation) để thu được nghiệm ban đầu cho  $X$  và  $U$ . Từ nghiệm này, giá trị ban đầu của biến liên hợp  $P$  được xây dựng dựa trên điều kiện  $\partial H / \partial u_i = 0$ .

Trong chương trình giải gián tiếp hệ phương trình trạng thái và liên hợp, nghiệm khởi tạo được nạp như sau:

```
load('sol_DirectCollocation_Guess.mat', ...
      'tgrid', ...
      'X_sol', ...
      'U_sol', ...
      'P_guess', ...
      'J_sol', ...
      'N', ...
      'h');

X_dc = X_sol;
U_dc = U_sol;
P_dc = P_guess;
```

Sau đó, các giá trị này được dùng làm nghiệm ban đầu cho bộ giải:

```
for k = 1:N+1

    opti.set_initial(X(:,k), X_dc(:,k));
    opti.set_initial(P(:,k), P_dc(:,k));
    opti.set_initial(U(:,k), U_dc(:,k));

end
```

### ***Bước 9. Giải hệ phương trình phi tuyến bằng IPOPT***

Sau khi thiết lập các ràng buộc, bài toán được giải bằng bộ giải IPOPT.

```
opts = struct;
```

```
opts.expand = true;

opts.ipopt.max_iter = 5000;
opts.ipopt.tol = 1e-8;
opts.ipopt.constr_viol_tol = 1e-8;
opts.ipopt.acceptable_tol = 1e-6;
opts.ipopt.acceptable_constr_viol_tol = 1e-6;

opti.solver('ipopt', opts);

sol = opti.solve();
```

Nghiệm thu được sau đó sử dụng hàm `plot` để vẽ đồ thị.